SIMULACIÓN

ING. MIGUEL MIRANDA

CÁTEDRA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

	TEMARIO	**Pág.**

I. INTRODUCCIÓN

La simulación es un método numérico de resolución de modelos lógico-matemáticos, caracterizado por el hecho de ensayar en repetidas oportunidades el sistema o proceso que se quiere estudiar a través del modelo que lo describe. Es decir, se experimenta sobre un modelo para poder inferir el comportamiento del "mundo real".

Los métodos cuantitativos utilizados ampliamente por la Investigación de Operaciones para resolver problemas, por el contrario, resuelven analíticamente el modelo para sacar entonces conclusiones y/o tomar decisiones con respecto a dicho sistema o proceso.

La simulación, también llamada método numérico, imita el funcionamiento del mundo real mediante la utilización de un modelo lógico- matemático.

La práctica de la simulación de modelos provee un marco adecuado para la formulación y resolución de problemas en donde los métodos cuantitativos dejan de ser eficaces debido a su complejidad. En algunos casos, la formulación analítica del problema requiere una gran simplificación para poder adaptar el método a la teoría que sustenta la resolución del problema, de manera que el modelo no representaría adecuadamente la realidad que se pretende describir. La simulación, en cambio, permite resolver problemas complicados con una mínima simplificación.

Si el sistema en estudio está correctamente modelizado, los resultados de la simulación pueden ayudar a comprender su funcionamiento, permitiendo extraer conclusiones respecto de su comportamiento y/o tomar decisiones que afecten su operación.

En el sector de atención al cliente de un sistema bancario, por ejemplo, la simulación puede contribuir a comprender el comportamiento de la generación de colas de usuarios, experimentando con distintas cantidades de cajeros. De esta forma podrían determinarse el número de cajeros mínimo para lograr que los clientes no tengan que esperar un tiempo superior a un valor establecido.

En un proceso de fabricación de productos, se puede utilizar esta técnica para identificar los cuellos de botella en la línea de producción a efectos de mejorar la eficiencia operativa.

La técnica de la simulación, que está considerada como la rama experimental de la Investigación Operativa, es un método muy simple, que no requiere de la aplicación de técnicas o principios matemáticos complejos. Su mayor ventaja radica en la flexibilidad para aplicarla como método de formulación y resolución de cualquier tipo de problema. Resulta de gran utilidad cuando el sistema que se describe, además de contener relaciones múltiples y complejas entre sus variables, evoluciona en forma impredecible.

La simulación se comenzó a desarrollar, al igual que muchas otras técnicas de la Investigación Operativa, en los laboratorios científicos para satisfacer necesidades bélicas durante la Segunda Guerra Mundial. Fue el científico J. Von Neuman quien la aplicó por primera vez mientras estudiaba problemas de reacciones nucleares en el denominado "Proyecto Montecarlo". De ahí que a la simulación de los procesos aleatorios se la conozca con el nombre de "Simulación Montecarlo".

El desarrollo de este método y su amplia difusión al mundo de los negocios fue resultado fundamentalmente de la utilización de las computadoras digitales. Debido a la gran carga de datos que se necesita para experimentar el "mundo real" con un modelo matemático, resultaría sumamente ineficaz e inapropiado efectuar una "corrida" de simulación sin el auxilio de un sistema de computación.

En la actualidad la Simulación constituye una de las más poderosas técnicas de resolución de problemas y es ampliamente utilizada en las Ciencias de la Administración y de la Ingeniería.

II. APLICACIONES

La simulación se utiliza para el estudio de todo tipo de sistemas: productivos, económico-financieros, militares, administrativos, físicos, químicos, biológicos, etc. Se ha prestado especial atención de esta herramienta para resolver problemas en las siguientes aplicaciones:

a) Planeamiento corporativo.

La experimentación sobre modelos de planeamiento económico-financiero para el análisis de sistemas corporativos, permite analizar proyectos de inversión y cuadros proyectados (balances, resultados, etc.). Pueden explorarse las alternativas propuestas, por ejemplo diferentes políticas de ventas, efectuando análisis marginales, respondiendo a preguntas del tipo "what if..." ("qué pasaría si...") o determinando los valores de algunos parámetros para lograr valores prefijados de las variables ("goal seaking").

Thomas H. Naylor ha sido un gran impulsor de la aplicación de la simulación a los sistemas de empresas.

Problemas complejos de flujo de tránsito, de carga y descarga de caminos, de distribución de productos, de telecomunicaciones, de operaciones de terminales aéreas o marítimas, de aplicaciones financieras, etc. se resuelven típicamente con simulación.

b) Administración de inventarios.

La simulación se utiliza para evaluar diferentes políticas relacionadas a la gestión de existencias. Se pueden analizar, por ejemplo, los distintos criterios de reposición (puntos de reorden o intervalos fijos), la fijación de niveles de stocks de seguridad o la determinación de lotes óptimos de compra, especialmente cuando la demanda del producto es aleatoria.

También se utiliza en empresas productivas en donde se aplican sistemas de Planeamiento de Requisición de Materiales (MRP), para evaluar cambios propuestos, por ejemplo en el Plan Maestro de Producción.

c) Sistemas de colas

Tal vez sea ésta la aplicación más difundida del método numérico. En la mayoría de los sistemas de filas de espera en cola, la distribución de los centros de atención, la disciplina de atención, las características de impaciencia de la población y, en muchas ocasiones, el proceso de arribo y atención, resultan demasiado complejos y con características tan particulares que no podrían aplicarse los métodos analíticos para su formulación y resolución. En estos casos, la simulación es la técnica más adecuada.

Los ejemplos de aplicación en la práctica son innumerables: puertos, aeropuertos, bancos, supermercados, autopistas, sistemas de computación, estaciones de servicios, sistemas telefónicos, playas de carga y descarga de productos, centros de trabajo productivos, etc.

En la mayoría de los casos, lo que se busca es determinar el nivel de atención a brindar en el sistema (generalmente a través del número de canales, o de la velocidad de atención de éstos) en forma tal de minimizar el costo total del proceso.

d) Operaciones de fábrica

La simulación se utiliza para analizar y optimizar operaciones industriales, como ser:

- Procesos de fabricación, ya sean discretos o continuos.
- Distribución de productos.
- Programación de actividades (secuenciamiento o asignación).
- Disposición en planta ("lay out").
- Planeamiento de operaciones y centros de trabajos en esquemas "Justo a Tiempo" ("Just in Time").
- Tráfico de productos.

Particularmente, pueden resolverse problemas de programación lineal y no lineal con parámetros no determinísticos, en combinación con otras técnicas de Investigación de Operaciones.

e) Administración de proyectos

Para el planeamiento, programación y control de actividades cuyos tiempos de ejecución resultan ser aleatorios con diferentes tipos de distribuciones estadísticas, se utiliza también esta técnica como herramienta.

III. DEFINICIONES

A continuación se definirán algunos términos útiles para el desarrollo y estudio del tema:

Sistema	Es un conjunto de objetos o entidades que interactúan (o tienen algún tipo de interdependencia) para el logro de un objetivo. Por ejemplo: sistemas de colas, sistemas de stocks, etc.
Proceso	Es un sistema que evoluciona dinámicamente.
Mundo real	Es un sistema o un proceso que se pretende describir a través de un modelo matemático.
Entidad	Es un objeto o componente de interés en un sistema. Por ejemplo, "clientes" para un sistema de colas, "producto" para un sistema de stocks.
Atributo	Es una propiedad característica de la entidad. Por ejemplo, en un sistema de colas la "tasa de arribos" o la "impaciencia" denotan atributos de los clientes, mientras que la "velocidad de atención promedio" constituye un atributo del canal. Del mismo modo, en un sistema de stocks, la "tasa de demanda" o el "punto de reorden" son atributos del producto.
Estado	Es un conjunto de variables que describen la condición del sistema en un momento determinado.
Actividad	Es una acción que produce un cambio en el estado del sistema. Tiene un principio y un fin perfectamente identificados. Algunas actividades ocurren dentro de los sistemas y se llaman "endógenas": Por ejemplo "atender a un cliente" es una actividad de un canal en un sistema de colas. "Requerir un producto" o "enviar mercadería" constituyen actividades en un sistema de stocks.
Evento	Es la modificación del estado del sistema. El ingreso de un cliente al sistema de colas y la llegada de la mercadería enviada por el proveedor en el sistema de stocks constituyen eventos.

IV: SIMULACIÓN DE PROCESOS

La simulación puede utilizarse para el estudio de sistemas puramente estáticos o, como es el caso más general, de sistemas dinámicos, es decir, aquellos que evolucionan sobre un parámetro (en general, el tiempo).

Dentro de los sistemas dinámicos (llamados procesos) podemos distinguir aquellos en los que las variables que definen su estado evolucionan en forma discreta (procesos discretos o digitales) y aquellos otros en los que dichas variables evolucionan en forma continua (procesos continuos o analógicos).

Un ejemplo de proceso discreto es el de un sistema de colas en donde el estado queda típicamente definido por la cantidad que se encuentra dentro del mismo. Una modificación se produce cuando se verifica un ingreso de un cliente al sistema o un egreso del mismo (Fig. 1).

Por el contrario, el almacenamiento de nafta en un tanque de una refinería, en donde existe una entrada continua del producto y una salida también continua, constituye un ejemplo de proceso continuo (Fig. 2).

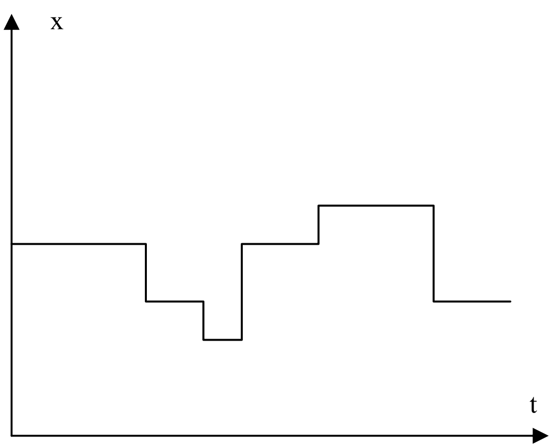


Fig. 1

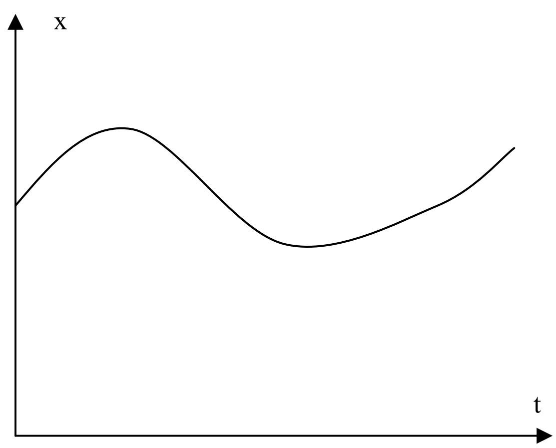


Fig. 2

La simulación puede ser determinística o estocástica (aleatoria) dependiendo de la naturaleza de los parámetros que intervienen en el problema.

Cuando los valores de los parámetros son exactos y perfectamente conocidos, decimos que la simulación es determinística. La utilización de la simulación para resolver problemas de sistemas determinísticos no es muy común, ya que los métodos analíticos son más apropiados debido a la simplicidad en la resolución. Se podrían mencionar como ejemplos de aplicación los análisis de alternativas sobre sistemas de planeamiento económico financiero y de planeamiento de requisición de materiales.

Los fenómenos dinámicos que evolucionan aleatoriamente se denominan procesos estocásticos. La simulación de los procesos estocásticos se llama "simulación probabilística" o, como es más comúnmente conocida, "simulación Montecarlo". La mayoría de los procesos físico-económicos de la realidad presentan algún grado de aleatoriedad. Y es aquí donde los métodos numéricos presentan su mayor ventaja como método de resolución de problemas.

Habitualmente, para resolver un problema a través de los métodos numéricos, deben hacerse varias "corridas" del sistema. Una "corrida" implica una representación completa del sistema evolucionando durante un período de tiempo (o, dicho de una forma más general, evolucionando sobre un parámetro t cualquiera). Durante una corrida se va observando el estado del sistema a intervalos de tiempo que pueden ser fijos o variables. En cada observación se hace un relevamiento de los valores de las variables que interesa determinar y se pasa luego a la próxima observación. Si la corrida ha sido suficientemente larga, pueden extraerse ciertas conclusiones para las condiciones en las que operó el proceso. Posteriormente, se pueden modificar las entidades, sus atributos y/o actividades que rigen el comportamiento del sistema, ya sean factores endógenos o exógenos, y se corre nuevamente el modelo.

De esta forma se experimenta sobre el modelo para extraer conclusiones definitivas con respecto al funcionamiento del "mundo real" en estudio o para tomar decisiones que regulen su comportamiento futuro.

En la década de 1950, con el advenimiento de las computadoras digitales, los primeros programas de simulación estaban escritos en FORTRAN. En las décadas de 1960 y 1970, también se utilizaron otros lenguajes de propósito general (PASCAL, BASIC), pero surgieron los programas específicos de simulación tales como el GPSS, SIMPSCRIPT, DYNAMO, GASP, SIMULA, SLAM, SIMAN, etc., que proporcionaron un marco más adecuado para resolver problemas.

Los lenguajes de propósito general requerían más tiempo de programación, pero el tiempo de procesamiento de la simulación era substancialmente menor. Los lenguajes especiales de simulación, en cambio, incrementaban el tiempo de corrida y el requerimiento de memoria en la computadora pero, como ocurre con cualquier lenguaje de alto nivel, simplificaron notablemente la programación y facilitaron los cambios.

El sistema GPSS (General Purpose System Simulator), que fue desarrollado por IBM, era muy apropiado para la simulación de sistemas de colas. Este sistema fue uno de los más divulgados y conocidos durante muchos años.

El SIMSCRIPT, también fue muy popular. Era más flexible y general que el GPSS, ya que podía emplearse para simular procesos discretos o continuos. Fue desarrollado por la

RAND Corporation a partir del trabajo originado por la empresa General Electric con su sistema GEMS (G.E. Manufacturing Simulator).

El nombre DYNAMO proviene de Dynamics Models. Este sistema, que fue creado por el Centro de Computación del MIT (Massachusetts Institute of Technology), ha tenido mucho éxito en la simulación de sistemas industriales, ya que era uno de los pocos que simulaba procesos continuos. Era fácil de entender y de operar.

Si bien estos lenguajes facilitaron la utilización del método numérico, cabe mencionar que al principio sólo las grandes empresas (petróleo, acero, etc.) o áreas del gobierno utilizaron la simulación, debido a que los programas eran muy caros y requerían considerables recursos de computación.

En la década de 1980 comenzó el uso de la simulación tal como la conocemos hoy. Las computadoras se volvieron más rápidas y accesibles. Las empresas comenzaron a trabajar con terminales, y la simulación fue descubierta para resolver problemas en muchos otros campos (empresas automotrices, electrodomésticas, etc.). La introducción de las computadoras personales a mediados de los ochenta llevó al desarrollo de simuladores de altísimo nivel y, de esta forma, la simulación se introdujo en la administración, en empresas textiles, manufactureras en general, de comunicación, de semiconductores y en áreas tales como telecomunicaciones.

En la última década del siglo pasado la aplicación de la simulación se comenzó a verificar en áreas no tradicionales, especialmente de servicios (sistemas bancarios, seguros, salud, construcción, servicios de entrega domiciliaria, comida rápida, análisis de riesgos, aerolíneas, etc.) y en sectores de ingeniería de producto y de proceso. Esta tendencia continuó con el cambio del siglo, en donde se han integrado los paquetes de simulación con otros paquetes, tales como hojas de cálculo y bases de datos.

Los sistemas simuladores actuales tienen generadores de números aleatorios, simuladores de variables con las distribuciones teóricas más conocidas, programas generadores de informes y facilidades de realizar análisis estadísticos de los resultados. Además, presentan ventajas comparativas muy interesantes, como ser la facilidad de incorporar módulos especiales orientados a determinada industria o servicio y animación en pantalla del proceso durante la corrida. Generalmente operan con interfaces gráficas, menús y diálogos para ser utilizados con el "mouse" en forma muy intuitiva. Se seleccionan elementos del sistema, se los conecta y se corre el modelo con una animación gráfica dinámica de los componentes, mientas se mueven sobre el sistema. Entre los más populares podemos mencionar: ARENA, @RISK, HOCUS SIMULATION, FACTOR/AIM, ITHINK y SIMFACTORY. Existen en la actualidad más de 200 paquetes de simulación disponibles.

En una reciente encuesta realizada por la IIE (Institute of Industrial Engineers), la simulación quedó en primer lugar en el ranking de las herramientas más utilizadas en las empresas de los Estados Unidos (por encima incluso de la programación lineal y de camino crítico).

V. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA SIMULACIÓN.

Como método de resolución de modelos, la simulación presenta la gran ventaja de su aplicabilidad general a sistemas con un alto grado de complejidad y aleatoriedad. Constituye una herramienta totalmente versátil con alcances limitados tan solo al tiempo para llevarla a cabo y a los recursos disponibles.

Los métodos cuantitativos (analíticos), en cambio, requieren a menudo una considerable simplificación del problema para adecuarlo a las condiciones que fundamenten la utilización del método de resolución. Por otra parte, en muchas situaciones, aún cuando no se restrinja tanto el modelo con hipótesis simplificativas, los problemas son tan complejos que resulta imposible obtener la solución analítica. En estos casos, el único enfoque práctico es el método de simulación.

Sin embargo, debe aconsejarse la utilización de los métodos cuantitativos siempre que sea posible aplicarlos. Muchos expertos en Investigación Operativa y en Ciencias de la Administración aseveran que la práctica de la simulación, a pesar de ser una técnica sumamente apreciable por su simplicidad, debe utilizarse como último recurso; es decir, cuando todo lo demás ha fracasado. La razón principal es que la simulación no es una técnica precisa como lo son los métodos analíticos, de los que se obtiene un resultado exacto del problema.

Los resultados simulados serán tanto más precisos cuanto mayor sea la longitud de la corrida. Además, en muchas aplicaciones se requiere una gran cantidad de corridas para inferir una solución aceptable desde un punto de vista estadístico. En algunos casos es imposible evaluar todas las alternativas de solución al problema, por lo que se procede entonces a considerar solo algunas de ellas y elegir la mejor solución entre las posibilidades planteadas. Así se habrá llegado a una "buena solución", a pesar de no ser la óptima. Estos métodos, aplicables a modelos optimizantes, se llaman procedimientos "heurísticos".

Los métodos cuantitativos, en cambio, utilizan los procedimientos "algorítmicos" para resolver los modelos decisorios (u optimizantes), asegurando la obtención de la solución óptima, si existe, entre las alternativas posibles.

Cabe destacar, sin embargo, que, a pesar de ser un método lento y costoso, la simulación resulta ser en muchas ocasiones el único recurso disponible ya que una gran cantidad de problemas, o bien no se encuadran en el contexto teórico requerido que los métodos de solución cuantitativa exigen, o bien son demasiado complejos para formularlos y resolverlos analíticamente.

Se pueden resumir las ventajas y desventajas de ambos métodos, considerando diferentes criterios comparativos en el Cuadro 1.

	MÉTODOS	
	CUANTITATIVOS	**SIMULACIÓN**
PRECISIÓN	ALTA	BAJA
VERSATILIDAD	BAJA	ALTA
RAPIDEZ	ALTA	BAJA
COSTO DE MODELIZACIÓN	ALTO	BAJO/MEDIO
COSTO DE RESOLUCIÓN	BAJO	ALTO
DIFICULTAD DE MODELIZACIÓN	ALTA	BAJA
POSIBLIDAD DE ANÁLISIS	ALTA	BAJA

Cuadro No. 1: Métodos cuantitativos vs. numéricos

VI. METODOLOGÍA PARA LA INSTALACIÓN DE MODELOS DE SIMULACIÓN

A continuación se detalla un método generalizado que se recomienda seguir para la instalación de un modelo de simulación. En la Figura 3 se puede observar un diagrama de flujo con cada una de las etapas a desarrollar .

1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El primer paso en un proceso de simulación consiste en realizar un análisis preliminar del sistema que se va a estudiar y determinar la interacción del mismo con otros sistemas. El problema debe quedar perfectamente aislado y definido para su estudio. Una buena definición del "alcance" permitirá identificar apropiadamente los límites del sistema y aislarlo de su entorno.

Esta etapa incluye también una correcta definición del objetivo o resultados que se persiguen con el estudio de simulación, un adecuado planteo de los interrogantes que deberán contestarse, un acabado conocimiento de las limitaciones o restricciones que el medio impone al sistema en estudio y, finalmente, una completa identificación de las variables y parámetros del problema.

2. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

La captura de datos es a menudo una de las partes más costosas del estudio de simulación, insumiendo extensos períodos de tiempo. La facilidad o dificultad de obtenerlos puede influir definitivamente en el éxito del proceso de simulación.

El relevamiento en campo es el método más efectivo para efectuar la recolección de los datos, pero también pueden utilizarse datos históricos si están disponibles y opiniones de expertos, si no existen otras alternativas.

Cuando el sistema tiene comportamiento aleatorio, se efectúa un análisis de la distribución estadística de las variables. Algunas distribuciones empíricas basadas en los datos relevados pueden asemejarse a distribuciones teóricas (Normal, Poisson, Exponencial, Beta, etc.). Para comprobar si esto es factible, se recurre a métodos de inferencia estadísticas, tales como las pruebas Chi-cuadrado o de Kolmogorov-Smirnov. El hecho de poder trabajar con distribuciones conocidas facilitará enormemente el proceso de simulación.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El siguiente paso es la formulación de un modelo lógico-matemático. Modelizar es una mezcla de arte técnica y experiencia. Como se ha expresado anteriormente, la gran ventaja de este método es que no requiere una simplificación considerable del sistema en estudio. En esta etapa se formulan las hipótesis simplificativas, que no serán tantas como en los modelos analíticos, en donde se debe adecuar el problema a la teoría matemática que se aplica para resolver el problema.

Será necesario aquí establecer cuáles serán las variables de salida (out-put) y cuáles las de entrada (in-put) del modelo y formular matemáticamente las condiciones de vínculo entre ellas. En el caso de haberse planteado un objetivo a optimizar, se lo deberá formular matemáticamente y deberá tenerse en claro cuáles son las variables de decisión.

Los parámetros son variables de entrada (in-put) al modelo. Algunas de estas variables pueden ser controlables (C_i) por quien toma la decisión (por ejemplo la cantidad de canales en paralelo a disponer en un sistema de colas) y otras son incontrolables (I_i), como ser la demanda de un producto en un sistema de stocks. Las variables controlables pueden ser modificadas en cada corrida para experimentar distintas alternativas de operación del sistema real.

Las variables de salida (out-put), o simplemente variables, del modelo son aquellas incógnitas cuyos valores se quiere determinar a partir de su resolución.

Si se trata de un modelo de decisión se debe plantear, como se dijo, el funcional, que es la expresión cuantitativa de lo que se desea optimizar. El funcional mide la eficiencia del sistema y puede expresarse, para todo modelo, en la forma:

$$Z = f(C_i, I_i)$$

4. DISEÑO DEL PROCESO DE SIMULACIÓN

En este paso de la simulación de procesos se debe definir el método de avance del parámetro dinámico de evolución "t" que se va a utilizar para el avance y la observación de las variables que definen el estado del sistema. El modelo se puede incrementar a períodos fijos o a períodos variables.

En el método de "intervalos fijos" se incrementa el parámetro "t" (que en general es el tiempo) a iguales períodos Δt, previamente definidos. Luego de cada avance se observa el estado del sistema y se toma nota del valor de las variables.

Supongamos que la variable "x" que identifica el estado de un sistema se modifica discretamente a medida que evoluciona el proceso, como se indica en la Figura 4, y que los intervalos Δt sean la unidad de tiempo.

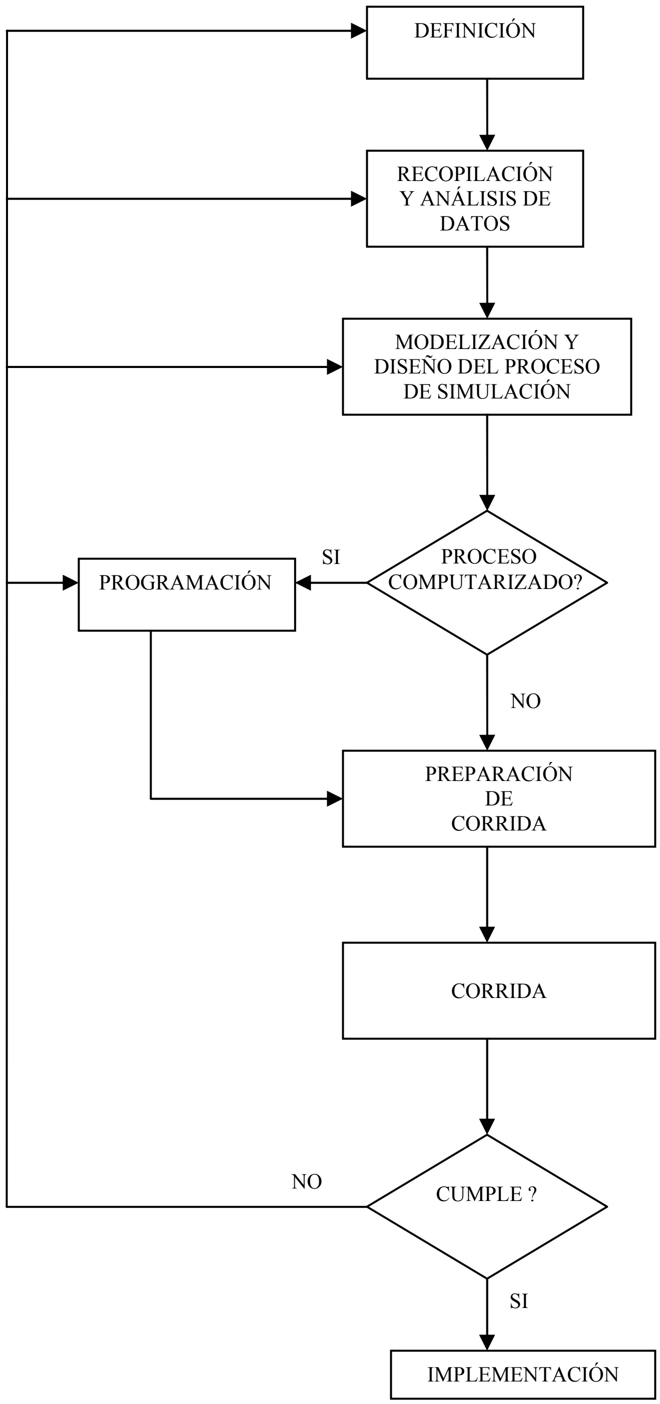

DEFINICIÓN
RECOPILACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS
MODELIZACIÓN Y DISEÑO DEL PROCESO DE SIMULACIÓN
PROCESO COMPUTARIZADO?
SI
PROGRAMACIÓN
NO
PREPARACIÓN DE CORRIDA
CORRIDA
CUMPLE ?
NO
SI
IMPLEMENTACIÓN

FIGURA 3

Se comienza en el instante t = 0. En este momento el valor de la variable x es igual a 6. Luego se incrementa el parámetro t en una unidad y se observa nuevamente el estado del sistema (x=6). En la próxima observación, es decir para t=2, la variable modifica su valor (x=7). Como no se sabe exactamente cuándo se modificó el estado dentro del intervalo, este método implica suponer que los eventos que se producen en los intervalos se verifican al finalizar el mismo. Es decir, que en el ejemplo estaríamos suponiendo que el evento se verificó en el instante t=2.

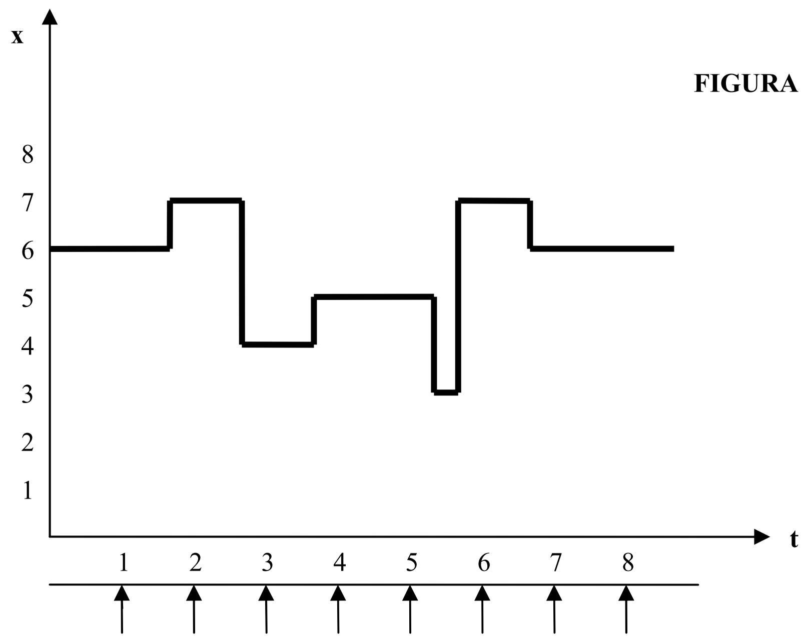


FIGURA 4

Los intervalos Δt deben tomarse lo suficientemente pequeños como para no dejar de detectar habitualmente ocurrencias de eventos, como sucede en la observación t=6 del ejemplo. Aquí, el observador advierte la variación de la variable de x=5 a x=7, cuando en realidad la variación en el intervalo fue de x=5 a x=3 primero y a x=7 después. Sin embargo, estos intervalos no deben tomarse tan pequeños como para que no haya habitualmente varios intervalos consecutivos sin que se produzcan eventos que modifiquen el estado del sistema, porque haría muy lento e ineficiente (aunque eficaz) al proceso de simulación.

El método de períodos variables, también llamado de "evento a evento" (o de "próximo evento) avanza el parámetro t, luego de cada observación, hasta la ocurrencia del próximo evento, como se observa en la Figura 5. Por ejemplo, la primera observación se hace en el instante t=1,10; luego se avanza el parámetro hasta el próximo evento (en t=2,30), etc. Este método tiene la ventaja de no perder información con respecto a los eventos producidos. Sin embargo, si se produce una cantidad muy grande de eventos por unidad de parámetro t, su utilización no sería apropiada, ya que como en cada observación se debe hacer un cálculo de los valores de las variables, resultaría una corrida sumamente lenta.

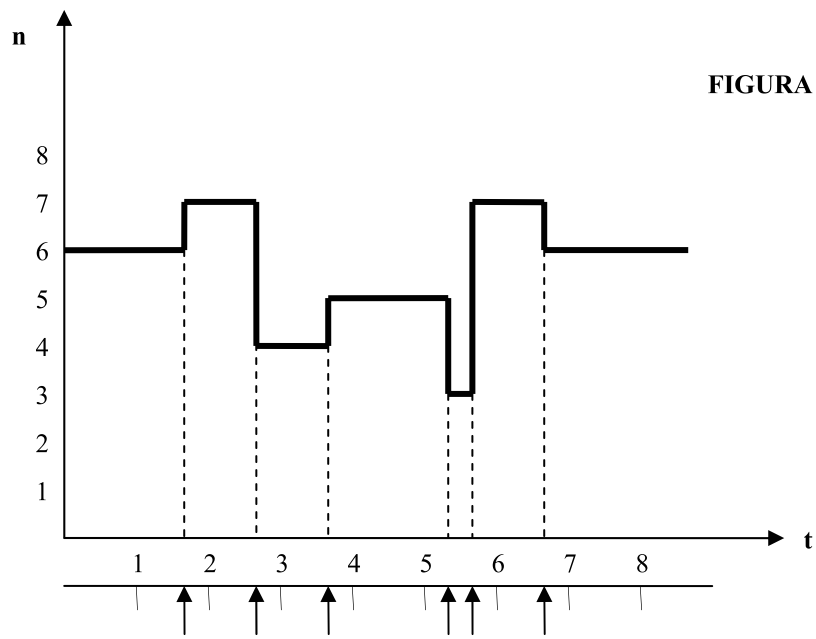


FIGURA 5

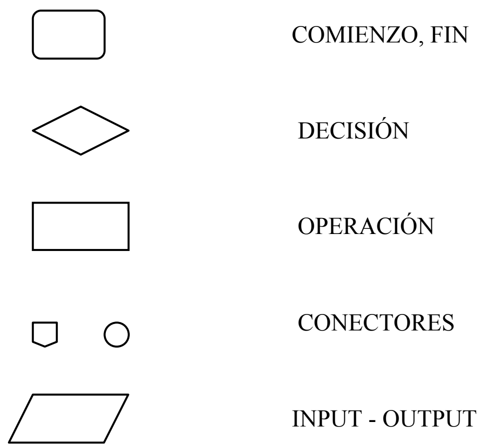
Para simular procesos continuos, es obvio que el único método a utilizar es el de "intervalos fijos".

La simulación podrá resolverse utilizando una computadora o en forma manual. Cabe destacar que en la simulación de la mayoría de los casos reales es impensable obtener resultados precisos sin el auxilio de una computadora. Solamente con fines didácticos o para problemas de muy pequeña magnitud y simples se justificaría la resolución manual.

Si se utiliza un sistema computarizado, se deberá proceder en esta etapa a construir un diagrama de flujo que clarifique la lógica computacional del modelo. Esto facilita la programación y ayuda al modelizador a descubrir posibles errores de lógica en el modelo.

El diagrama de flujo es una representación gráfica de la secuencia lógica de las actividades o de los eventos (operaciones) y decisiones que se toman durante el proceso. Para su graficación se utilizan habitualmente los símbolos indicados en el gráfico de la página siguiente.

Si la tabla de simulación es manual, se deberá realizar un diseño de una tabla, en donde se representa en la primera columna el parámetro "t" y en el resto de las columnas se consignan los valores de las distintas variables del proceso. La primera fila se referirá al estado inicial del sistema (t=0). La segunda fila corresponderá a la primera observación del sistema luego de avanzar el proceso un intervalo Δt (fijo o variable, según el método elegido de incremento del parámetro "t"). En la tercera fila se consignarán los valores correspondientes a la segunda observación, y así sucesivamente.



Debe prestarse especial atención al diseño de las tablas de simulación a fin de que puedan observarse la evolución de los valores de las variables a través de la corrida. En el cuadro No. 2 se indica el formato básico de una tabla de simulación.

En las simulaciones de "evento a evento" conviene representar en columnas el instante en que se verificará el próximo evento, como así también el tamaño de los intervalos Δt entre los eventos.

t	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**
t(0)						
t(1)						
t(2)						
....						
...						
...						

Cuadro No. 2: Tabla de simulación

5. PROGRAMACIÓN DEL MODELO

Un buen diagrama de flujo facilitará la programación del modelo para correrlo en una computadora. Es también importante diseñar informes de salida que sean fáciles de comprender por parte de los usuarios y que permitan al especialista validar rápidamente el programa.

La selección del paquete más apropiado debe hacerse con especial cuidado. Existen softwares muy orientados a aplicaciones específicas (manufactura, aerolíneas, packaging, transporte, análisis financieros, personal, construcción, industria farmacéutica, transporte, refinación, etc.). También existe una gran diversidad de precios y posiblidades. La revista ORMS, publicación del **IN**stitute **F**or **O**perations **R**esearch and **M**anagement **S**cience (INFORMS), realiza con cierta periodicidad evaluaciones sobre los paquetes más conocidos.

El sistema ARENA, en particular, constituye una herramienta de simulación muy general y, adaptable a diferentes situaciones e industrias. Permite crear un ambiente de modelización propio para el usuario. Es muy fácil de usar y flexible, ya que se adapta a diferentes tipo de procesos industriales, compañías o proyectos, mediante la incorporación de módulos específicos.

6. RESOLUCIÓN

Para la resolución del problema deben considerarse las condiciones iniciales del sistema con las que se va a efectuar la corrida, la longitud de ésta y el proceso de resolución propiamente dicho.

a) Determinación de las condiciones iniciales,

En la simulación de procesos estocásticos puede interesar estudiar al sistema en estado estable (régimen permanente) o en estado transitorio hasta alcanzar la estabilidad de las variables (régimen transiente).

En la Figura 6 puede observarse un ejemplo de comportamiento de algunas variables de salida de un modelo. Vemos que, desde el estado inicial en el instante $t=0$ los valores promedios de las variables evolucionan de manera fluctuante hasta que comienzan a estabilizarse a partir de un valor, indicado como t_1 en el gráfico.

Si, en cambio, lo que se desea es estudiar el comportamiento del sistema en estado de régimen permanente, lo más apropiado es hacer una corrida lo suficientemente extensa como para que los efectos del período transiente sobre el valor de las variables desaparezcan. Es decir, llamando t_s al tiempo total de la simulación, la relación t_1/t_s debe ser prácticamente cero.

Otros autores consideran apropiado excluir del relevamiento los valores de las variables durante un tiempo, al comienzo del proceso. O sea, se simula el modelo hasta que se supone que el sistema entra en estado de régimen permanente. Recién a partir de ese momento comienzan a promediarse los valores de las variables.

Finalmente, existe lo que se llama simulación regenerativa, que consiste en tomar como estado inicial de una corrida al estado final de una corrida previa.

b) Longitud de la corrida.

En los procesos estocásticos, para determinar el número de observaciones necesarias a fin de que los resultados sean estadísticamente confiables, se deberá recurrir a los métodos de inferencia estadística. Si no es posible, se debe hacer una corrida suficientemente larga y luego validar los resultados.

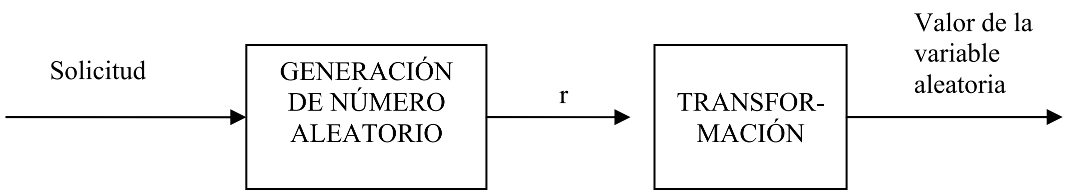
Cabe destacar que cuanto mayor sea el tamaño de la simulación, tanto más precisos serán los resultados obtenidos, pero también será mayor el costo de la resolución del problema.

c) Simulación del proceso

Una vez definidas las condiciones iniciales y la longitud de la corrida, se comienza a simular el proceso. Partiendo del instante t=0, se simulan los valores de las variables aleatorias.

Para generar valores aleatorios de las variables se utiliza el denominado Proceso Montecarlo, que es un proceso de dos pasos consistente en:

1. solicitar un número aleatorio "r" a un generador de números aleatorios, y
2. transformar el número aleatorio "r" en un valor simulado de la variable "x" que se desea determinar.



De esta forma, a través del proceso Montecarlo se pueden obtener valores muestrales de una distribución probabilística. Estos valores se utilizarán entonces como entradas del modelo.

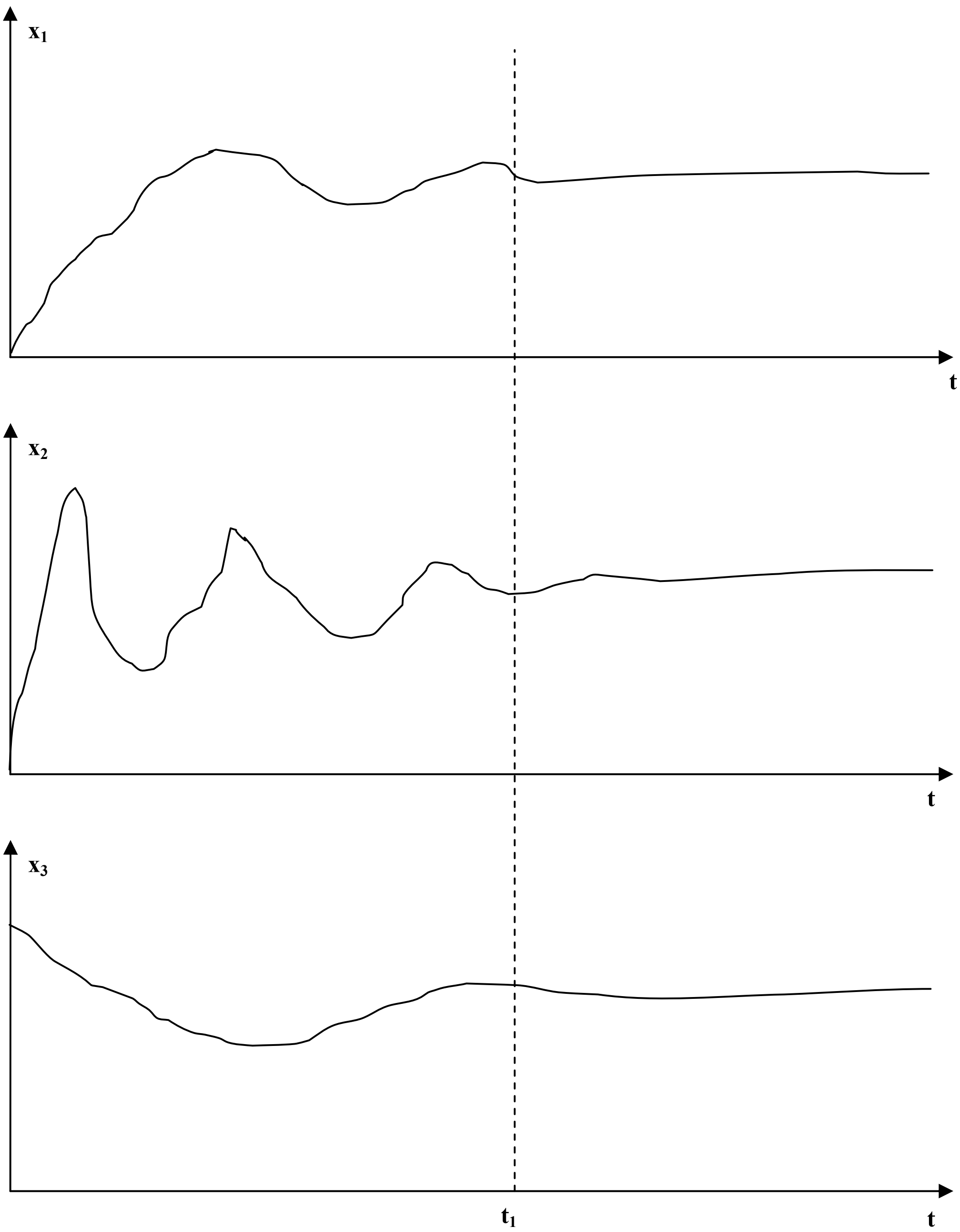


Figura 6

Posteriormente, se avanza el parámetro "t" conforme al método elegido, se efectúa un relevamiento de todas las variables que definen el estado del sistema en ese instante, se calculan los valores de las variables de salida del modelo y, de ser necesarios, se determinan los promedios hasta ese instante.

Estos pasos se repiten hasta que el tiempo "t" iguale o supere al tiempo "t_s" establecido como límite de la simulación, instante en el cual se imprimen los resultados obtenidos.

Si se trata de un modelo de decisión, se calcula el valor del funcional para esa corrida. Luego se modifica el valor de la variable de decisión y se procede a efectuar una nueva corrida, y así se repite sucesivamente. De esta manera se comparan los resultados de las distintas corridas a efectos de poder seleccionar el valor de esa variable decisoria que optimice el proceso.

7. VALIDACIÓN

Antes de implementar el modelo es necesario validarlo para asegurarse que refleja adecuadamente el comportamiento del mundo real y, en consecuencia, poder extraer conclusiones realistas y/o tomar decisiones acertadas a partir de la operación del mismo.

Unos de los elementos a validar son los parámetros de entrada del modelo; es decir, habrá que observar si la distribución de las variables simuladas ha respondido durante el proceso a la distribución asumida.

También se deben verificar los parámetros de salida a través de comparaciones con el comportamiento del mundo real.

Cuando se estudian sistemas en estado de régimen permanente, debe validarse que la longitud de corrida sea tal que permita obtener resultados realistas. Una forma de determinarla es dibujando los resultados promedios de las variables del modelo versus la longitud de la corrida y observar el comportamiento estable de las variables del modelo.

Finalmente, deberá validarse el programa, en el caso de que se haya utilizado un sistema computarizado.

En el caso de que se observara que el modelo no responde a la realidad que se estudia, deberá revisarse su formulación en cualquiera de las etapas anteriores del procedimiento de instalación que hemos estudiado.

8. IMPLEMENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

A partir de una correcta interpretación de los datos, se procederá a sacar conclusiones y tomar decisiones respecto a la operación del sistema real, implementando los cambios que correspondan para que opere eficientemente.

El modelo puede utilizarse por única vez para resolver un problema específico, o cotidianamente para operar el sistema. En ambos casos deberá tomarse la precaución de documentar adecuadamente los resultados obtenidos a efectos de poder justificar la toma de decisiones.

VII. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

La primera etapa en el proceso Montecarlo consiste en la generación de números aleatorios. Éstos son números formados a partir de secuencias aleatorias de dígitos del 0 al 9, extraídos en forma totalmente aleatoria, de manera que cada dígito que aparece en la secuencia tiene igual probabilidad de ocurrencia y es estadísticamente independiente de los otros números de la sucesión.

En consecuencia, la distribución estadística de dígitos aleatorios resulta ser uniforme discretizada, con valores enteros entre 0 y 9.

Supongamos la siguiente secuencia de dígitos aleatorios:

3; 6; 1; 0; 3; 7; 2; 9; 4; 5; 1; 5; 3; 7; 8; 6; 0; 1; 1; 4; 7; 2; 3; 2; 7; 0; 5; 5; 1; 7; 3; 8; 2; 4; 3; 1; 8; 6; ...

A partir de ella se pueden obtener, por ejemplo, números aleatorios de dos dígitos, tomando de a dos números consecutivos de un dígito, como se indica a continuación:

36; 10; 37; 29; 45; 15; 37; 86; 01; 14; 72; 32; 70; 55; 17; 38; 24; 31; 86; ...

Si de aquella secuencia se extraen tres números consecutivos, se pueden formar secuencias de números aleatorios de tres dígitos:

361; 037; 294; 515; 378; 601; 147; 232; 705; 517; 382; 431; ...

En una simulación se emplean muy a menudo números al azar en el intervalo (0,1). Si se necesitara formar una secuencia de números aleatorios de, por ejemplo, 3 dígitos, habría que extraer de la secuencia tres dígitos consecutivos y agregar una coma decimal antes de cada grupo:

0,361; 0,037; 0,294; 0,515; 0,378; 0,601; 0,147; 0,232; 0,705; 0,517; 0,382; 0,431; ...

Una secuencia de números aleatorios podrían hacerse tomando los cuatro últimos dígitos de los números de teléfono de una guía telefónica, siguiendo una secuencia determinada, por ejemplo descendente.

Otras formas, un poco más prácticas, de obtención de secuencias de números aleatorios son las que se basan en los denominados métodos físicos, que utilizan dispositivos físicos de precisión tales como bolilleros con reposición de bolillas, una con cada uno de los dígitos del 0 al 9, ruletas, dispositivos de aleatorización electrónicos, etc. A partir de alguno de estos procedimientos físicos se han generado tablas de números al azar.

La Rand Corporation, creó una tabla de más de un millón de dígitos aleatorios utilizando equipamiento físico especial.

Generalmente, las tablas están separadas en grupos de cinco dígitos consecutivos horizontal y verticalmente, como se indica en el siguiente ejemplo:

27572	65087	27395	39579	24428	04198
63971	18481	47608	74990	46661	20827
92087	64135	75427	91282	18405	99918
24189	28961	28814	13908	55773	59023
73009	00656	59825	83662	03325	36936
68707	25355	89168	39532	95797	24423
29149	73098	40859	07871	49908	46622
08686	86571	81180	42791	12826	18404
79944	65797	64418	81417	39085	55773
85879	07647	66877	82580	36623	03329
80160	83457	22572	32455	22569	43509
55816	57758	75176	75136	33951	41667
29256	33641	66889	63408	94529	74603
73271	89874	51421	22927	95549	83095
35892	19919	17465	91508	16420	20504

Para seleccionar la secuencia de números, se puede comenzar en cualquier lugar de la tabla; luego debe seguirse una única secuencia, ya sea ésta extraída en forma horizontal, vertical u oblicua, de manera ascendente o descendente. Por ejemplo, secuencias válidas de números aleatorios pueden ser las siguientes:

2; 7; 5; 7; 2; 6; 5; 0; 8; 7; 2; 7; 3; 9; 5; 3;... (secuencia de un dígito comenzando por la primera fila; de izquierda a derecha)

5; 8; 4; 8; 0; 5; 3; 6; 5; 7; 3; 7; 3; 9; 9;.... (secuencia de un dígito comenzando por la segunda columna del segundo grupo vertical en forma descendente)

0,291; 0,497; 0,309; 0,840; 0,859; 0,078; 0,714;.... (secuencia de números decimales de tres dígitos, extraídos a partir de la segunda fila del segundo grupo horizontal, seleccionadas de izquierda a derecha)

29; 73; 40; 07; 49; 08; 86; 81; 42;...(secuencia de números enteros de dos dígitos tomados a partir de la segunda fila del segundo grupo horizontal, seleccionados en forma horizontal de las dos primeras columnas de cada grupo de columnas, de izquierda a derecha).

Estas tablas pueden estar grabadas en disquetes o en CD´s, de manera que si se va a utilizar una computadora para realizar la simulación, se podría utilizar alguna de las tablas disponibles en dichos medios, en forma externa o grabándola en el disco rígido. Este método conocido como de "generación externa" consume bastante tiempo y espacio en la memoria de la computadora, por lo que resulta impráctico e innecesario. Lo más común es que sea el mismo equipo quien produzca los números aleatorios; este procedimiento se denomina de "generación interna".

A partir de las experiencias de D. H. Lehmer en 1959, se han realizado muchos estudios para efectuar la generación de números con las computadoras. Expertos en sistemas han diseñado generadores de dígitos que proveen secuencias que satisfacen ampliamente las pruebas de aleatoriedad sobre las propiedades estadísticas que deben tener los procesos aleatorios. Los números obtenidos a partir de estos generadores se denominan "pseudoaleatorios", puesto que nos son aleatorios puros.

Los generadores deben ser rápidos, ya que en una corrida de simulación van a ser invocados varias miles de veces. También es esencial que sean recurrentes y que produzcan secuencias largas y no degeneradas. Todos ellos producen secuencias que se repiten cíclicamente, con cada ciclo exactamente igual al anterior. Sin embargo, dentro de un ciclo, los números producidos se asemejan a números aleatorios puros (igual probabilidad de ocurrencia e independencia estadística). Un ciclo o período típico excede el millón de números de varios dígitos, de manera que la repetición del ciclo no resulta ser un inconveniente.

La mayoría de las computadoras disponen de generadores aleatorios. Los fabricantes de los sistemas han testeado ampliamente las secuencias producidas por sus generadores, a fin de asegurar que las mismas sean de períodos largos y que no se produzca degeneramiento. Una secuencia de números con degeneración implica que algunos dígitos, o todos, a partir de determinado punto se repiten en ciclos cortos. Por ejemplo la siguiente es una secuencia degenerada:

23, 42; 88; 02; 23; 12; 17; 74; 34; 25; 73; 46; 32; 90; 74; 34; 25; 73; 46; 32; 90; 74; 34; 25; 73; 46; 32; 90; 74; 34; 25; 73; 46; 32; 90;...

ya que se puede observar la repetición del ciclo 74; 34; 25; 73; 46; 32; 90; luego del número 17.

También es una secuencia degenerada la que se indica a continuación:

70367
11981
33023
91098
74527
43501
77883
43668
61357
00181

55443
32368
04657
....

En este caso, los dígitos de la derecha se repiten cíclicamente en períodos cortos: 7; 1; 3; 8;

La recurrencia en los generadores significa que cada número se genera iterativamente de una relación matemática. Es decir, el siguiente número aleatorio de la sucesión se obtiene a partir del último número que se obtuvo. Obviamente, para empezar el proceso se requiere como dato un número inicial, comúnmente llamado "semilla".

El denominado "método del cuadrado medio" fue uno de los primeros generadores para la producción de estas secuencias de números pseudoaleatorios. Para generar secuencias de números de "k" dígitos con este método, se eleva al cuadrado el número obtenido recurrentemente en el paso anterior, obteniéndose de este modo un número de 2k dígitos o de 2k-1 dígitos (en este último caso se añade un dígito cualquiera a la derecha del número obtenido a fin de lograr uno de 2k dígitos). Llamemos a este resultado y_n. El nuevo número aleatorios x_n se determina eligiendo los k dígitos centrales de y_n.

Supongamos que el número semilla para una secuencia es 2341. En la siguiente tabla se puede observar la secuencia (x_n) de números de cuatro dígitos obtenidos:

n	**x_n**	**x_n^2**	**y_n**
0	2341	5480281	5480281*
1	8028	64448784	64448784
2	4487	20133169	20133169
3	1331	1771561	1771561*
4	7156	51208336	51208336
5	2083	....	....

El cuadrado del número semilla da como resultado un número de 7 dígitos. En consecuencia se agrega un dígito cualquiera a derecha (*) a fin de obtener un número de 8 dígitos. Los cuatro dígitos centrales formados de esta manera (8028) constituyen entonces el próximo número de la serie.

Los números aleatorios generados con los métodos del cuadrado medio tienen un ciclo muy breve y, en muchas ocasiones, no pasan las pruebas de aleatoriedad. Por estas razones han dejado de utilizarse.

La mayoría de los sistemas utilizan los denominados "métodos congruenciales lineales". Estos métodos deben su nombre al hecho de que se generan a partir del módulo de los números generados.

Los métodos congruenciales pueden ser aditivos, multiplicativos o mixtos. El generador más divulgado es el del método congruencial mixto, en donde la relación de recurrencia es la siguiente:

$$\boxed{\mathbf{X_{n+1} = (a \cdot x_n + c)\ (mod\ m)}}$$

en donde:
m = número deseado de valores diferentes que se desean obtener; es el módulo de la relación.
a = constante multiplicadora ($1 < a < m$).
c = constante aditiva ($c < m$).

En la tabla siguiente se observa un clásico ejemplo del método congruencial mixto para los valores m = 8, c=7, a=5 y x_0=4:

n	**x_n**	**$a \cdot x_n + c$**	**$(a \cdot x_n + c)$ (mod m)**
0	4	27	3 + 3/8
1	3	22	2 + 6/8
2	6	37	4 + 5/8
3	5	32	4 + 0/8
4	0	7	0 + 7/8
5	7	42	5 + 2/8
6	2	17	2 + 1/8
7	1	12	1 + 4/8
8	4	27	3 + 3/8
9	3	....	....

La secuencia obtenida es, entonces: 4; 3; 6; 5; 0; 7; 2; 1; 4; 3; 6; 5; 0; ...... En este ejemplo la sucesión incluye cada uno de los ocho números. Esto es deseable que ocurra, pero no siempre es así.

Las mejores secuencias se obtienen de la buena elección de los parámetros a, c. x_0 y m. En la siguiente tabla se puede observar lo que sucede con una incorrecta selección de los mismos, por ejemplo x_0=6, c=7, m=10 y a=5.

n	**x_n**	**$a \cdot x_n + c$**	**$(a \cdot x_n + c)$ (mod m)**
0	6	37	3 + 7/10
1	7	42	4 + 2/10
2	2	17	1 + 7/10
3	7	42	4 + 2/10
4	2	17	1 + 7/10
5	7	..	....

Aquí la secuencia presenta degeneración, ya que el ciclo se repite muy rápidamente: 6; 7; 2; 7; 2; 7; 2; ...

Las mejores secuencias se obtienen teniendo en cuenta lo siguiente:

a) El multiplicador "a" debe ser impar y no divisible por 3 ni por 5. Usualmente se toma:

$a = p^k + 1$

b) Conviene que la constante aditiva "c" sea un número entero impar y que "m" no sea divisible exactamente por c.

c) Es preferible que "m" sea el mayor número primo disponible en la computadora y que, a su vez, sea menor que p^b, en donde:
b= número de posiciones (bits) de cada palabra (por ejemplo b= 32 o b=64, etc.).

Muchos sistemas toman el siguiente valor de "m":

$m = p^{b-1} - 1$

El método congruencial multiplicativo es igual al mixto, pero tomando c=0. Aquí no debe elegirse a=1, ya que serían todos los $x_n=x_0$ para todo n. Tampoco debe tomarse $x_0=0$, pues serían todos los $x_n=0$.

El método congruencial aditivo también es un caso particular del mixto, en donde la constante "a" es igual a cero.

VIII. GENERACIÓN DE VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

La segunda etapa del proceso Montecarlo consiste en hacer la transformación del número aleatorio (distribuido uniformemente) en un valor de la variable (con una distribución determinada).

Existen varios métodos para realizar la transformación, pero el más simple y fundamental es el denominado de la "transformada inversa", que se describe a continuación.

Supongamos que se quieren generar valores aleatorios x_i de una población estadística particular cuya función de densidad de probabilidad sea f(x). La función de distribución acumulada F(x) está definida en el intervalo (0,1). Se pueden generar números aleatorios (r) distribuidos uniformemente en ese mismo rango, y establecer la relación:

$$F(x) = r$$

De hecho, "r" es la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor que x.

Cuando es posible encontrar la función inversa

$$F^{-1}(r) = x$$

se pueden hallar valores de x a partir de variables aleatoria "r" distribuidas uniformemente (Fig. 7), en donde $F^{-1}(r)$ es la transformación inversa de r (definida en el intervalo (0,1)) en el dominio de x. Luego, un número aleatorio r_0 nos da, a través de esta transformación, un valor simulado (x_0) de la variable x.

Es obvio que la transformación podría hacerse con el complemento de F(x), es decir con la función acumulada G(x).

Este concepto de trasformada inversa puede aplicarse a través de métodos gráficos, tabulares o matemáticos. a continuación analizaremos algunos ejemplos.

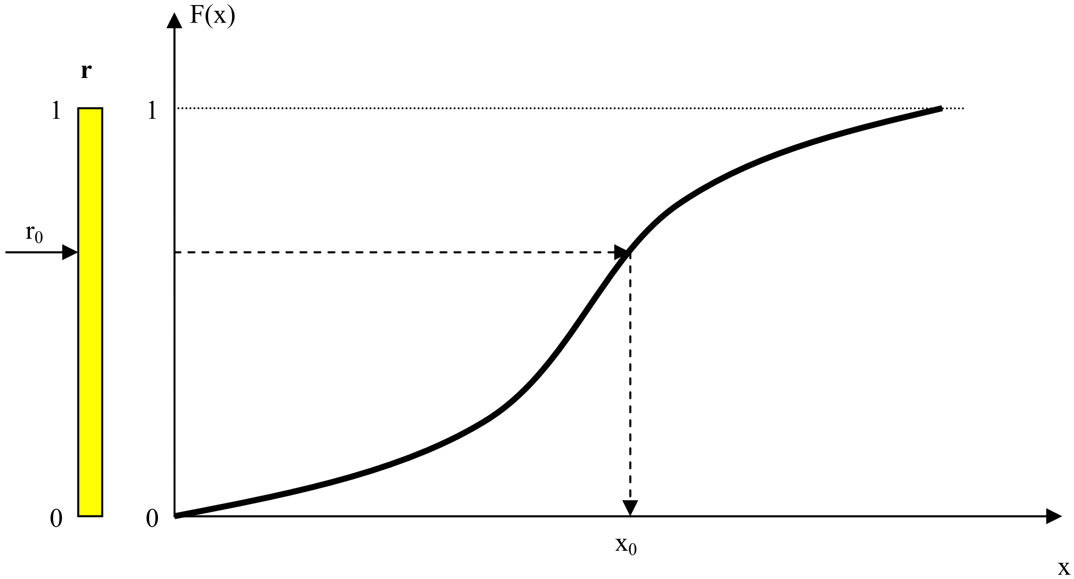


Figura 7

1. DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS DISCRETAS

En este caso se utilizan los métodos gráficos o tabulares. Supongamos que una variable puede asumir los valores 0, 1, 2, 3 y 4, para la que se han hallado las siguientes probabilidades:

x	0	1	2	3	4
P(x)	0,15	0,20	0,35	0,25	0,05

El procedimiento gráfico consiste en:

a. Hallar los valores de la función acumulada. Para nuestro ejemplo tendremos:

x	0	1	2	3	4
F(x)	0,15	0,35	0,70	0,95	1

b. Dibujar la distribución acumulada F(x) de la variable aleatoria x (Fig. 8).

c. Generar un número aleatorio r entre 0 y 1 (con un generador de números aleatorios o con una tabla).

d. Localizar el número aleatorio en el eje de las ordenadas y proyectar una horizontal hasta intersecar a F(x).

e. Proyectar una vertical hasta el eje de las abcisas y leer el valor de x simulado.

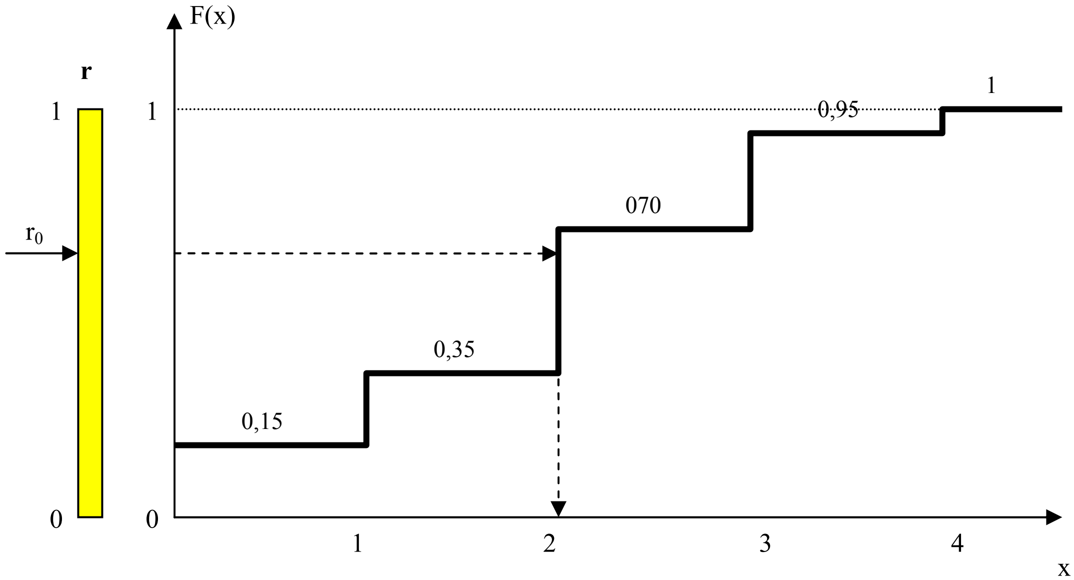


Figura 8

Seleccionemos por ejemplo la siguiente secuencia de números aleatorio:

91; 55; 46; 72; 12; ....

Los valores simulados, serán:

r	x
0,91	3
0,55	2
0,46	2
0,72	3
0,12	0
…..	
…..	

El método tabular es ampliamente usado debido a su simplicidad; se utilizan tablas en lugar de gráficos. Consiste en establecer rangos de valores de números aleatorios "r" para cada valor posible "x" de la variable, de manera de asignar a cada valor de la variable la probabilidad que le corresponde. Para el ejemplo anterior será:

r	x
00 - 14	0
15 - 34	1
35 - 69	2
70 - 94	3
95 - 99	4

De esta manera se han asignado 15 números de 100 (del 00 al 14) al valor 0 de x, es decir un 15% de probabilidad, 20 números sobre 100 al valor 1 de x (del 15 al 34), o sea un 20% de probabilidad, 35 números al valor 20 (del 35 al 69) otorgando un 35% de probabilidad, y así sucesivamente.

Seleccionando la siguiente secuencia de números aleatorios:

23; 06; 15; 98; 43; 42; …

los valores simulados de la variable x serán:

r	x
23	1
06	0
15	1
98	4
43	2
42	2
…..	…

2. DISTRIBUCIÓN POISSON

La mayor limitación del método tabular es que no se puede utilizar para distribuciones continuas, pero es ideal para simular distribuciones teóricas discretas, como por ejemplo la distribución Poisson.

Supongamos una variable aleatoria "n", con media $\lambda t = 0{,}5$, distribuida poissonianamente. La probabilidad Poisson de que en el intervalo "t" se produzcan "n" eventos viene dada por:!

$$P(n) = \frac{(\lambda\, t)^n \; e^{-\lambda t}}{n\,!}$$

Los valores de las probabilidades asociadas a cada valor que puede asumir la variable para la media $\lambda t = 0,5$ pueden ser extraídos de cualquier tabla de Poisson:

n	P(n)
0	0,607
1	0,303
2	0,076
3	0,012
4	0,002
5	0,000

o de la Poisson complementaria (F_{Po} o G_{Po}):

n	$F_{Po}(n)$
0	0,607
1	0,910
2	0,986
3	0,998
4	1,000

Con estos datos, se construye una tabla que asigne una cantidad de números a cada valor de n para que represente su probabilidad de éxito.

r	n
000 - 606	0
607 - 909	1
910 - 985	2
986 - 997	3
998 - 999	4

Luego, para simular la variable "n" se toman en primer lugar números aleatorios (en este caso de tres dígitos), se observa luego dentro de qué rango de la tabla anterior se encuentra el número y, así, se obtiene el valor correspondiente de la variable. Suponiendo la siguiente secuencia de números aleatorios: 476; 841; 943; 342; 682; 852; …. los valores simulados serán:

r	n
476	0
841	1
943	2
342	0
682	1
852	1
…..	…

3. DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Para las distribuciones continuas teóricas se utiliza el método matemático, el cual requiere formular la función de distribución acumulada F(x) y resolverla para el punto donde la función es igual al número aleatorio "r":

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \qquad \Rightarrow \qquad x = F^{-1}(r)$$

Este procedimiento se aplica para simular la distribución uniforme (Figura 9A). La función de densidad de probabilidad para una variable x distribuida uniformemente viene dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Siguiendo el procedimiento de la transformada inversa explicado tal como se muestra en la Figura 9B, se integra la función f(x) entre a y x:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)\, dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dx = \left.\frac{x}{b-a}\right]_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

Por consiguiente, haciendo F(x) = r, tendremos:

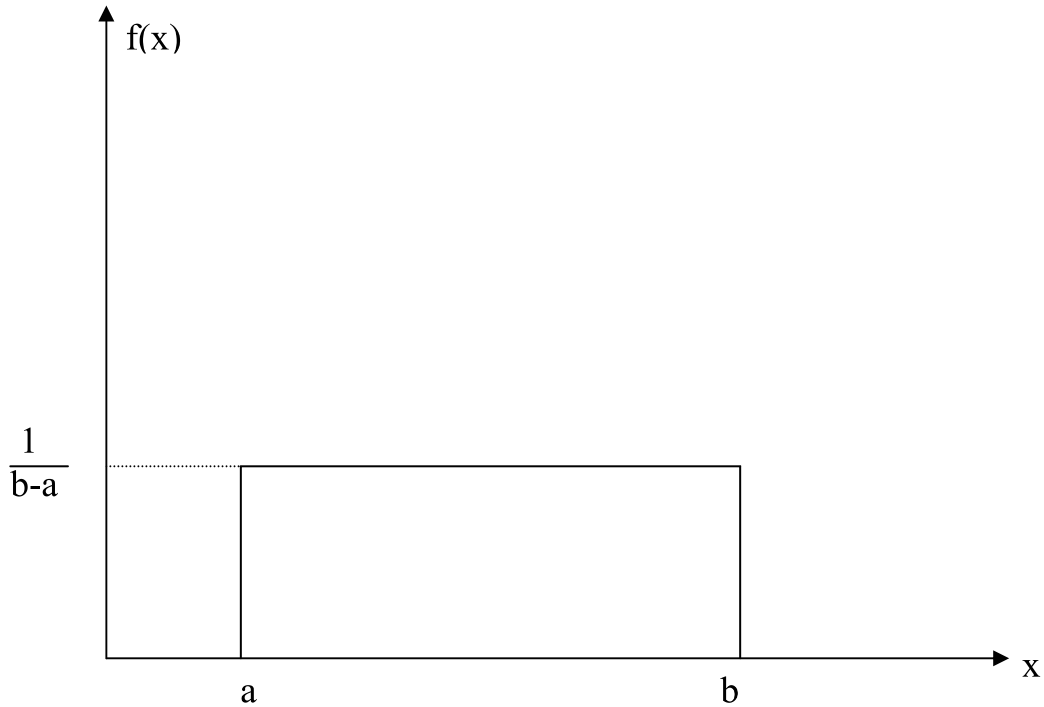
$$r = \frac{x-a}{b-a}$$

y despejando:

$$\boxed{x = r\,(b-a) + a}$$

Tomemos por ejemplo una variable uniforme x con parámetros b = 10 y a = 5, con los siguientes números aleatorios:

163; 127; 894; 533; 605; 209; ….



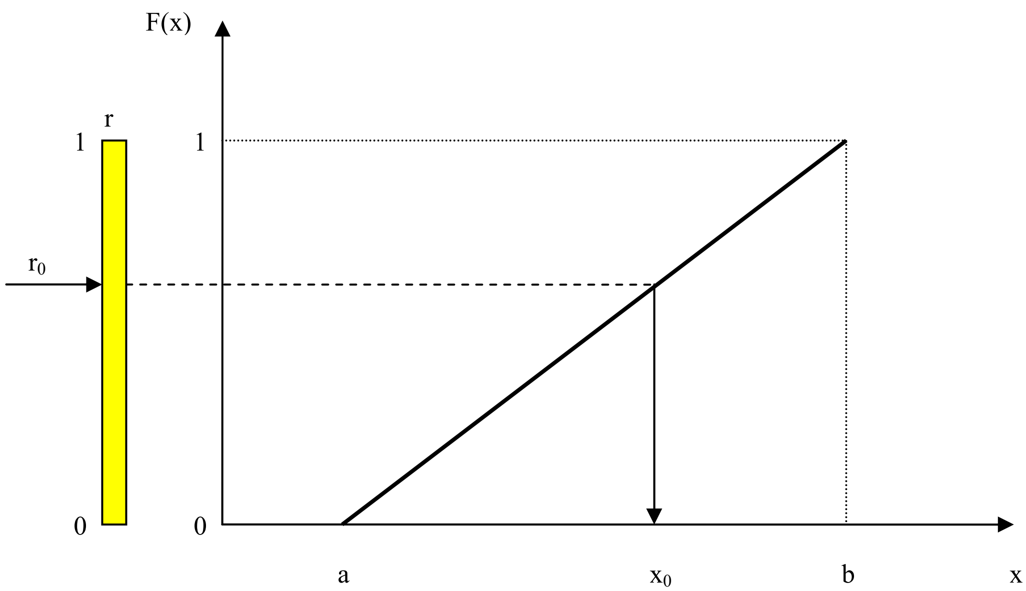


Figura 9B

tendremos que los valores simulados serán:

r	x
0,163	5,815
0,127	5,635
0,894	9,470
0,533	7,665
0,605	8,025
0,209	6,045
…..	…

4. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Dada una variable continua "t" con distribución exponencial (ver Figura 10), la función de densidad de probabilidad viene dada por la expresión:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

Integrando entre 0 y t:

$$F(t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \int_0^t e^{-\lambda t} d(\lambda\, t) = -e^{-\lambda t} \Big]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

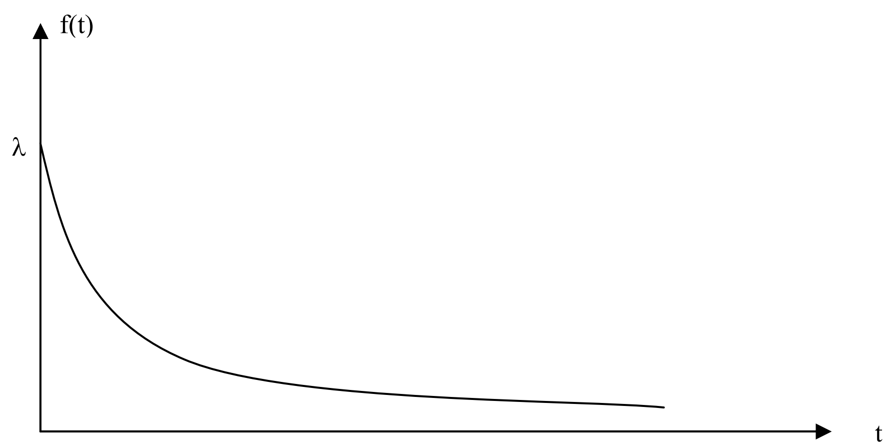


Figura 10

Esta función de distribución acumulada se muestra en la Figura 11. Sin embargo, por razones de simplicidad, trabajaremos con la función complementaria, G(t) = 1 - F(t), estableciendo entonces la relación de r con G(t).

$$G(t) = e^{-\lambda t} = r$$

$$-\lambda \cdot t \cdot \ln e = \ln r$$

$$\lambda \cdot t = \ln \frac{1}{r}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{r}}$$

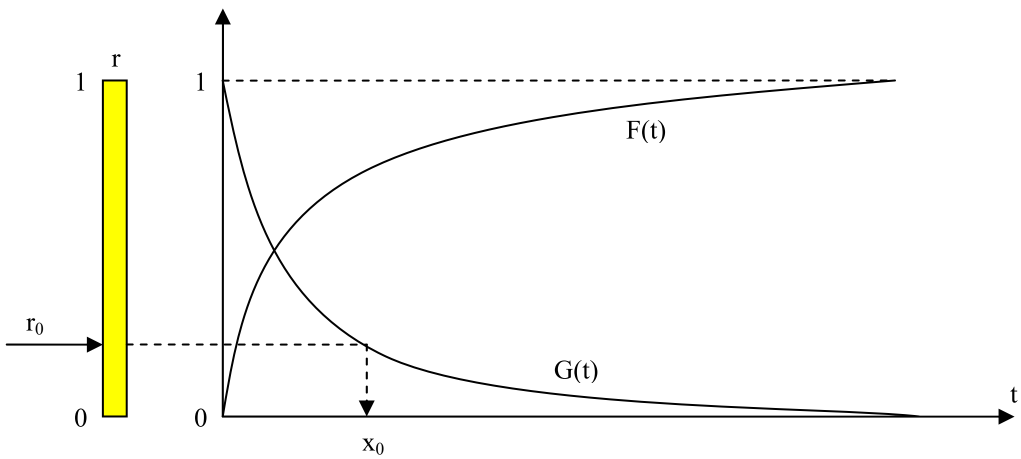


Figura 11

Simularemos, por ejemplo, una variable t con parámetro λ = 0,1, es decir con media 1/λ = 10, con los siguientes números aleatorios:

03; 28; 41; 33; 61; 55; …..

Los valores simulados serán entonces:

r	t
0,03	35,06
0,28	12,73
0,41	8,91
0, 33	11,09
0,61	4,98
0,55	5,98
…..	…

5. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Para simular una variable "x" con distribución normal (Figura 12) se utiliza la variable normal estandarizada "u", es decir una normal que tiene con media $\mu = 0$ y desvío estándar $\sigma = 1$ (Figura 13), que sustenta con "x" la relación:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

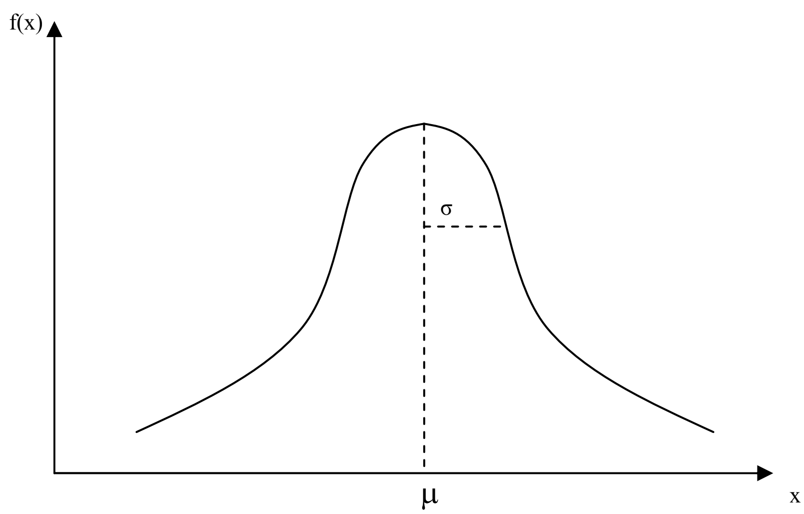


FIGURA 12

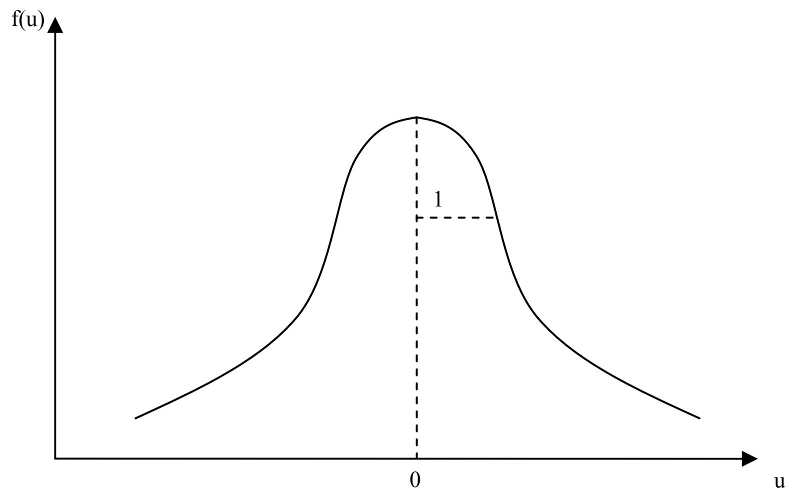


FIGURA 13

Luego, para aplicar el método de la transformada inversa (Figura 14) se establece la siguiente relación de transformación:

$$r_u = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = \mu + r_u \cdot \sigma}$$

en donde r_u es un número aleatorio normal estandarizado.

Los números r_u se pueden extraer de una tabla de números aleatorios normales o generándolos a partir de números aleatorios comunes que producen los generadores. Para ello se toman 12 números aleatorios en el intervalo 0-1, se suman y al resultado se le resta el valor 6; el número así generado es un número aleatorio normal estandarizado. La justificación de este procedimiento se explica a continuación.

Se hace uso del teorema del límite central, que establece que la suma de N variables aleatorias independientes r_i se aproxima a una distribución normal con media

$$\mu = \sum_{1}^{N} \mu_i$$

y variancia

$$\sigma = \sum_{1}^{N} \sigma_i$$

Esta aproximación es mejor a medida que aumenta N.

Suponiendo que las r_i son variables decimales aleatorias con distribución uniforme entre 0 y 1:

$$f(r_i) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$$

con media

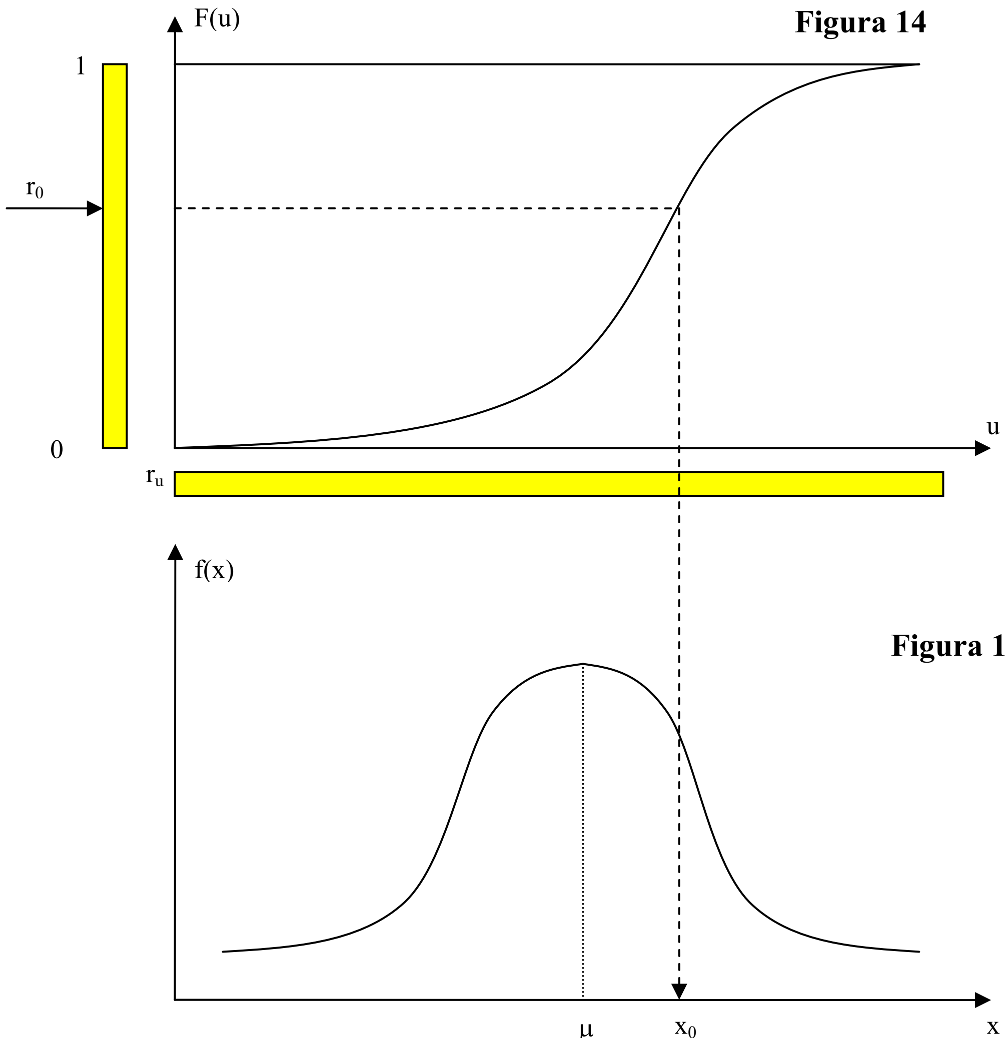
$$\mu_i = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$$

y variancia

$$\sigma_i^2 = \frac{b-a}{12} = \frac{1}{12}$$

Figura 14

Figura 15



Luego, la variable suma $\sum_{1}^{N} r_i$ tendrá distribución normal con media

$$\mu = \sum_{1}^{N} \mu_i = \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$$

y variancia

$$\sigma^2 = \sum_{1}^{N} \sigma_i^2 = \sum_{1}^{N} \frac{1}{12} = \frac{N}{12}$$

es decir, desvío estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{N}{12}}$$

Quiere decir que, por aplicación del teorema de límite central, la variable

$$r_u = \frac{\sum_{1}^{N} r_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}}$$

es un número aleatorio normal estandarizado ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$).

Esta aproximación es muy buena aún para valores pequeños de N. Para N = 12 se obtiene un muy buen resultado. Por consiguiente, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$r_u = \sum_{1}^{12} r_i - 6$$

Luego, teniendo en cuenta la expresión de transformación de la variable

$$x = \mu + r_u \cdot \sigma$$

tendremos que

$$x = \mu + \left[\sum_{1}^{12} r_i - 6 \right] \cdot \sigma$$

es una observación aleatoria a partir de una distribución normal de media μ y desvío estándar σ. Esto significa que para cada valor de x que se simule, se necesitarían extraer 12 números aleatorios convencionales.

6. DISTRIBUCIONES TRIANGULARES

6.1 Distribución triangular rectangular sesgada a derecha (Figura 16)

Para una distribución de este tipo con parámetros "a" y "m", dado que

$$\frac{(m - a) \cdot h}{2} = 1$$

tendremos que la altura "h" viene dada por la expresión:

$$h = \frac{2}{m - a}$$

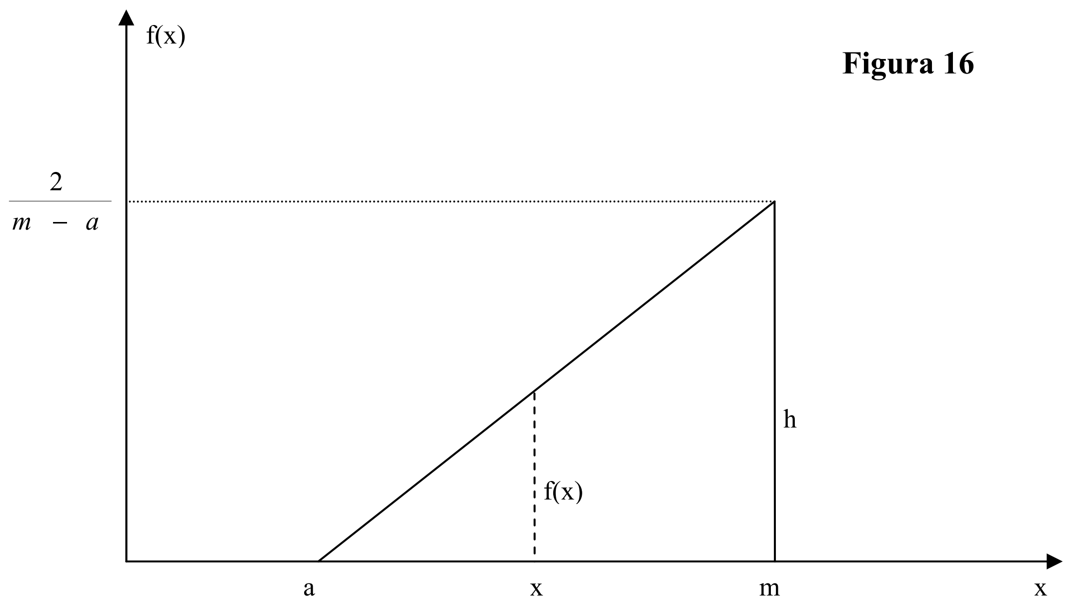


Figura 16

Luego

$$\frac{f(x)}{(x-a)} = \frac{2}{(m-a)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{2 \cdot (x-a)}{(m-a)^2}$$

Integrando:

$$F(x) = \int_a^x \frac{2 \cdot (x-a)}{(m-a)^2}\, dx = \left. \frac{(x-a)^2}{(m-a)^2} \right]_a^x = \frac{(x-a)^2}{(m-a)^2}$$

Asimilando F(x) a r tendremos que:

$$\frac{(x-a)^2}{(m-a)^2} = r$$

Despejando x:

$$(x-a)^2 = r \cdot (m-a)^2$$
$$(x-a) = \sqrt{r} \cdot (m-a)$$

$$\boxed{x = a + \sqrt{r} \cdot (m-a)}$$

2. Distribución triangular rectangular sesgada a izquierda (Figura 17):

Para una distribución de este tipo con parámetros m y b tendremos que:

$$\frac{(b-m)\cdot h}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2}{b-m}$$

$$\frac{f(x)}{b-x} = \frac{2}{(b-m)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{2\cdot(b-x)}{(b-m)^2}$$

$$F(x) = \int_m^x 2\,\frac{(b-x)}{(b-m)^2}\,dx = -\left.\frac{(b-x)^2}{(b-m)^2}\right]_m^x = \left.\frac{(b-x)^2}{(b-m)^2}\right]_x^m = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-m)^2} = r$$

Despejando:

$$\frac{(b-x)^2}{(b-m)^2} = 1 - r$$

$$(b-x)^2 = (1-r)\cdot(b-m)^2$$

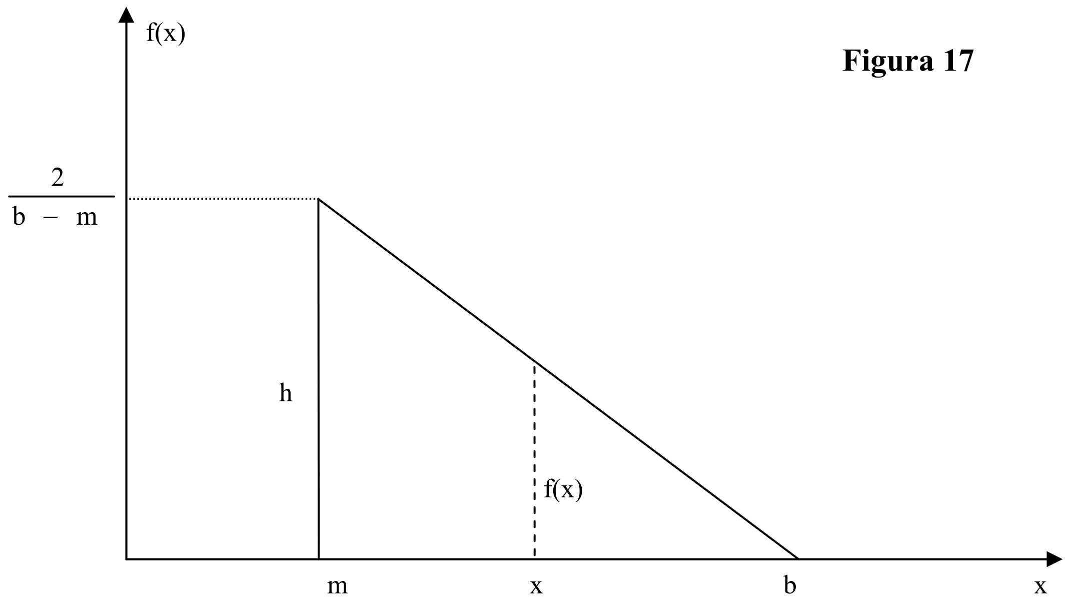


Figura 17

$$b - x = \sqrt{(1 - r)} \cdot (b - m)$$

$$\boxed{x = b - \sqrt{(1 - r)} \cdot (b - m)}$$

3. Método de composición:

Para simular la distribución triangular se utiliza el denominado "método de composición" que consiste en expresar la función de probabilidad f(x) de una variable x como una mezcla de varias distribuciones de probabilidad. El método consiste en lo siguiente:

a. Se divide la distribución de probabilidad en sub-áreas (A_i) como se indica en la Figura 18 y se define una distribución de probabilidad para cada una de ellas: $f_1(x)$, $f_2(x)$, …., $f_n(x)$, de manera que:

$$f(x) = A_1.f_1(x) + A_2.f_2(x) + ... + A_n.f_n(x)$$

siendo $\sum A_i = 1$

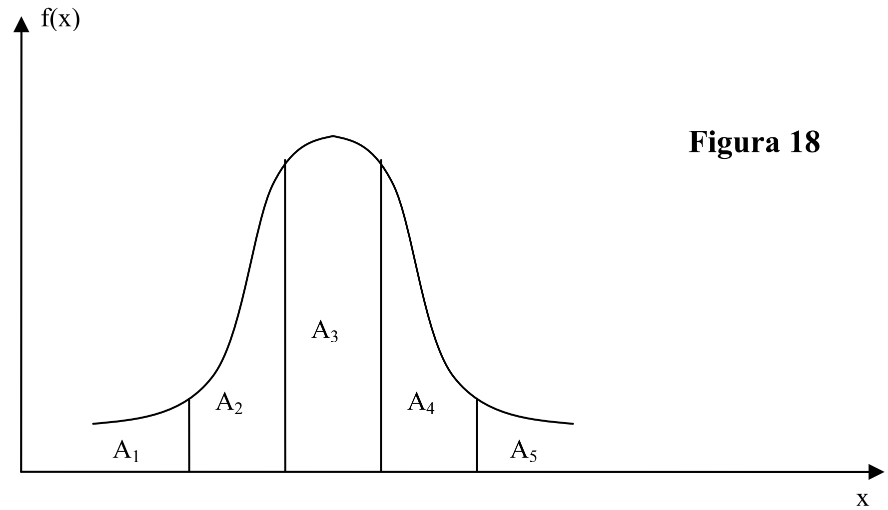
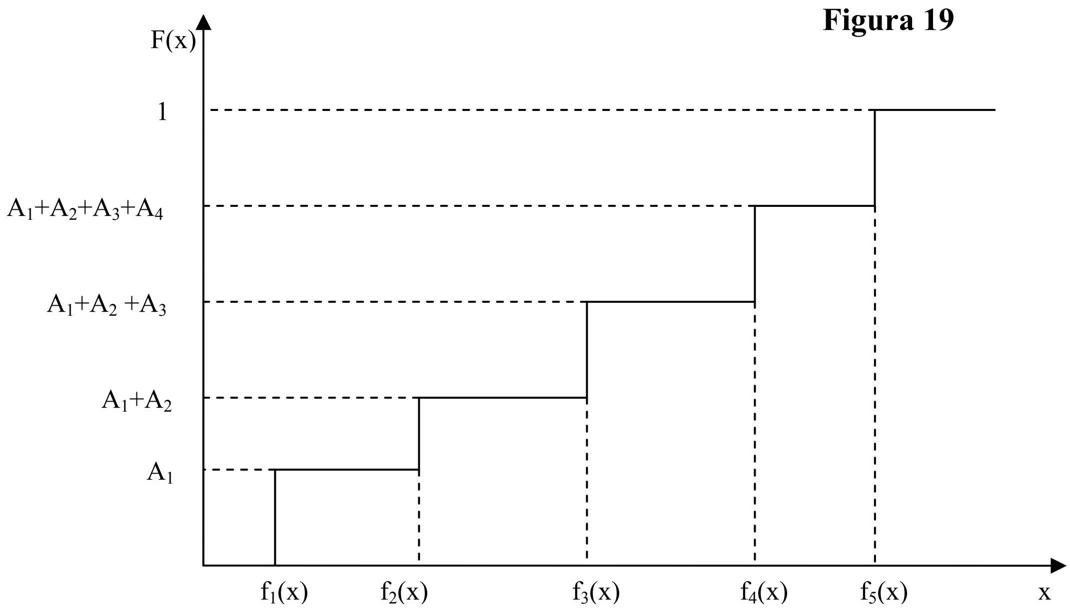


Figura 18

b. Se obtiene la distribución acumulada de las áreas, y se tabula o se grafica (como se indica en la Figura 19).

Figura 19



c. Se generan dos números uniformes r_1 y r_2. A partir de r_1 se selecciona la distribución $f_i(x)$ con la que se va a simular el valor de "x" obtenido de la Figura 19 (o de la tabla equivalente). A partir de r_2 se simula el valor de la variable aleatoria x.

4. Distribución triangular:

Para simular una distribución triangular convencional de parámetros "a", "m" y "b" (Figura 20), se puede utilizar el método de composición. Tendremos que el área viene dada por:

$$\frac{(b-a)\cdot h}{2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{2}{b-a}$$

Las dos sub-áreas estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$A_1=\frac{(m-a)}{(b-a)} \quad \text{y} \quad A_2=\frac{(b-m)}{(b-a)}$$

Luego, se generan 2 números aleatorios r_1 y r_2 (r_1 para determinar a qué distribución corresponde el número aleatorio r_2). En la Figura 21 puede observarse el gráfico correspondiente a esta determinación.

Si

$$r_1<\frac{(m-a)}{(b-a)}$$

se simula el valor para la distribución f_1. En caso contrario, se simula para f_2.

$$f_1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x=a+\sqrt{r_2}\cdot(m-a)}$$

$$f_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x=b-\sqrt{(1-r_2)}\cdot(b-m)}$$

Tomemos como ejemplo una variable triangular de parámetros a = 10, m = 15 y b = 25. Para estos valores

$$\frac{m-a}{b-a}=0,333$$

Suponiendo la siguiente serie de números aleatorios:

16; 15; 12; 35; 89; 70; 53; 65; 60; 76; 21; 94; ….

tendremos los siguientes valores de la variable x:

Figura 20

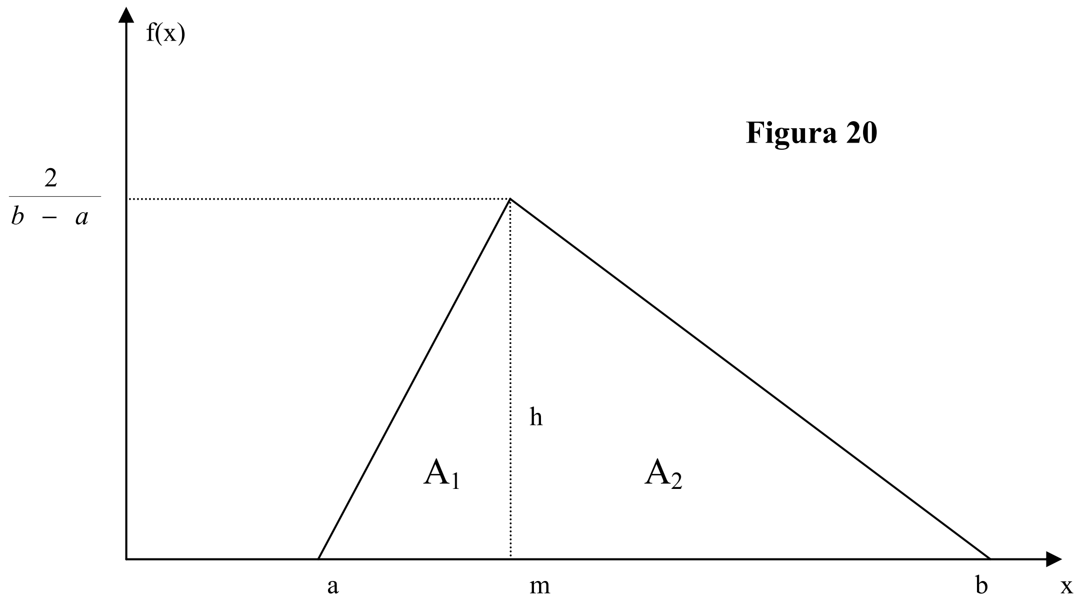
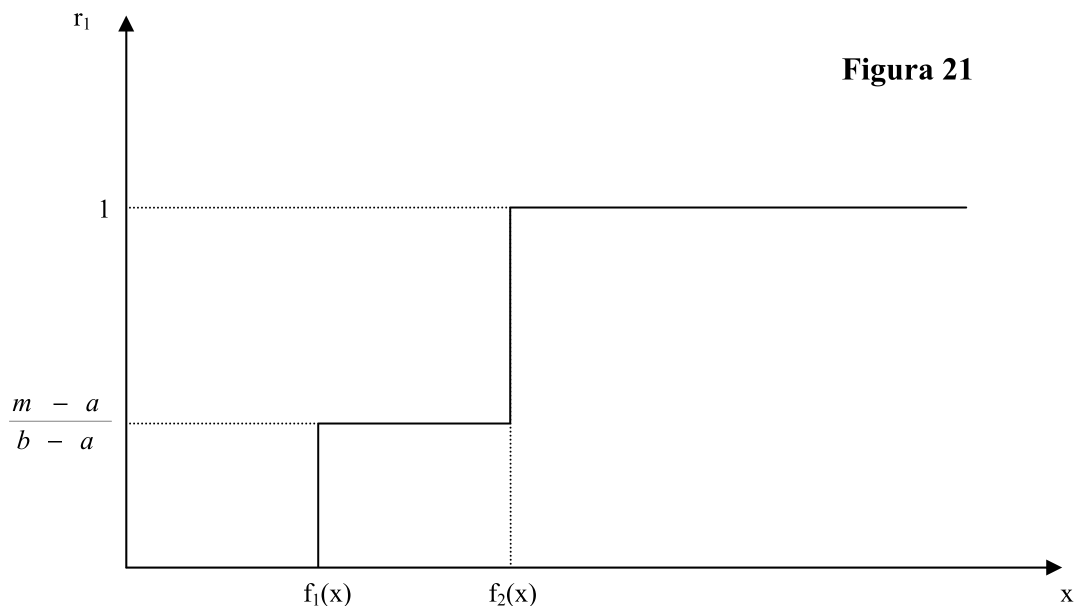


Figura 21



r_1	f_i	r_2	x
0,16	f_1	0,15	10,75
0,12	f_1	0,35	11,75
0,89	f_2	0,70	22,00
0,53	f_2	0,65	21,50
0,60	f_2	0,76	22,60
0,21	f_1	0,94	14,70
…..	…..	…..	…..

VII. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1. STOCKS

Una empresa quiere evaluar si el nivel actual del stock de reorden (punto de pedido) para la operación de uno de sus artículos es adecuado a través del porcentaje de pedidos insatisfechos. Para ello dispone de los siguientes datos:

- ✓ La demanda responde a una distribución Poisson de media 4 unidades por día.
- ✓ El tiempo que transcurre entre la emisión de la orden y la recepción de la mercadería ("lead-time") tiene una distribución normal de media 3 días hábiles y desvío estándar 1 día hábil.
- ✓ El lote de compra es de 22 unidades.
- ✓ El nivel actual de stock de reorden es de 10 unidades.

Para resolver el problema se procederá a simular el proceso utilizando el método de intervalos fijos, con un intervalo de un día hábil. La longitud de corrida, a título de ejemplo solamente, será de 50 días hábiles. Para establecer las condiciones iniciales del sistema, supondremos que hay 20 unidades en stock.

Por otra parte, se asumen las siguientes hipótesis de trabajo:

a. El nivel de inventario se revisa al finalizar el día. Si es menor que el stock de reorden se emite la orden de compra por las 22 unidades.

b. Si hay una orden pendiente de entrega, no se emite una nueva orden.

c. La mercadería que se recibe durante el día estará disponible para satisfacer la demanda recién el día siguiente. En consecuencia, la consideraremos en el stock inicial del próximo día hábil de haberse recibido.

Llamaremos:

t = día actual

Q = tamaño de la orden de compra = 22 unidades

SI(t) = stock inicial al comenzar el día t

D(t) = demanda del día t

SF(t) = stock final al finalizar el día t

$SF(t) = SI(t) - D(t)$ si $SI(t) > D(t)$, o

$SF(t) = 0$ si $SI(t) \leq D(t)$

j = número de pedido

TR(j) = tiempo de reaprovisionamiento ("lead time") para el pedido j

TD(j)= día en que estará disponible el pedido j.
TD(j) = t + TR(j) + 1 (se redondea al entero superior, conforme a la hipótesis asumida).

DI(t) = demanda insatisfecha en el día t

DI = demanda insatisfecha acumulada

DT = demanda total acumulada

La demanda tiene una distribución Poisson con media $\lambda = 4$. En consecuencia se deberá recurrir a la Tabla 3 de la Distribución Poisson Acumulada $F_{PO}(n)$. Con estos datos se prepara el siguiente cuadro de decisión:

n	r
0	000 - 017
1	018 - 091
2	092 - 237
3	238 - 432
4	433 - 628
5	629 - 784
6	785 - 888
7	889 - 948
8	949 - 978
9	979 - 991
10	992 - 996
11	997 - 998
12	999

Luego, se procede a armar la tabla del proceso de simulación (Cuadro 1) como se explica a continuación:

1) Se comienza el día t = 1 con el Stock Inicial SI(1) = 20.

2) Se solicita al generador de números aleatorios (o se toma de una tabla de números aleatorios) un número aleatorio a fin de generar la demanda diaria. Supongamos que se la secuencia que se genera de números aleatorios fuera la siguiente:

130; 042; 659; 796; 769; 516; 296; 142; 366; 654; 997; 486; 823; 872; 133; 229; 358; 587; 113; 140; 339; 113; 743; 841; 839; 625;560; 832; 252; 611; 415; 111; 234; 955; 034; 009; 422; 236; 408; 299; 771; 107; 200; 015; 623; 802; ….

El primer número aleatorio es 130, al que le corresponde una demanda diaria de 2 unidades, es decir D(1) = 2.

3) Se calcula el stock final del día 1: SF(1) = 20 - 2 = 18.

4) Como no se alcanzó el punto de pedido, no se emite la orden de compra.

5) Se incrementa el parámetro t en 1 día.

El procedimiento se repite para el resto de los días hasta observar que el stock final sea menor que el punto de reorden. Esta situación se da al final del cuarto día, por lo que se realiza un pedido de 22 unidades. Para simular el tiempo de reaprovisionamiento se procede del modo siguiente:

i) Se solicita un número aleatorio normal. Supongamos que la secuencia de números aleatorios normales sea la siguiente:

-0,202; 0,420; -0,353; -2,555; 0,666; 0,077; -1,365; ….

El primer número aleatorio es -0,202.

ii) Se calcula el tiempo de reaprovisionamiento del primer pedido:

TR(1) = 3 + (-0,202) .1 = 2,798

iii) Se calcula el día en que estarán disponibles las 22 unidades pedidas:

Redondeo superior {TD(1) = t + TR(1) + 1 = 4 + 2,798 + 1 = 7,798} = 8

Prosiguiendo la simulación, observamos que en el día 6 se agota el stock ya que la demanda es mayor al Stock Inicial de ese día. Luego, la demanda insatisfecha será:

DI(6) = D(6) - SI(6) = 4 - 1 = 3

mientras que el stock final es nulo.

Del mismo modo, para el día 7 tendremos:

DI(6) = D(6) - SI(6) = 4 - 1 = 3

y

S(7) = 0

El día 8 está disponible para su venta el lote de 22 unidades solicitado. Luego tendremos que el Stock Inicial será:

SI(8) = SF(7) + Q = 0 + 22

De este modo, se procede hasta simular los 50 días. Una vez finalizado el proceso, se calcula el porcentaje de pedidos insatisfechos:

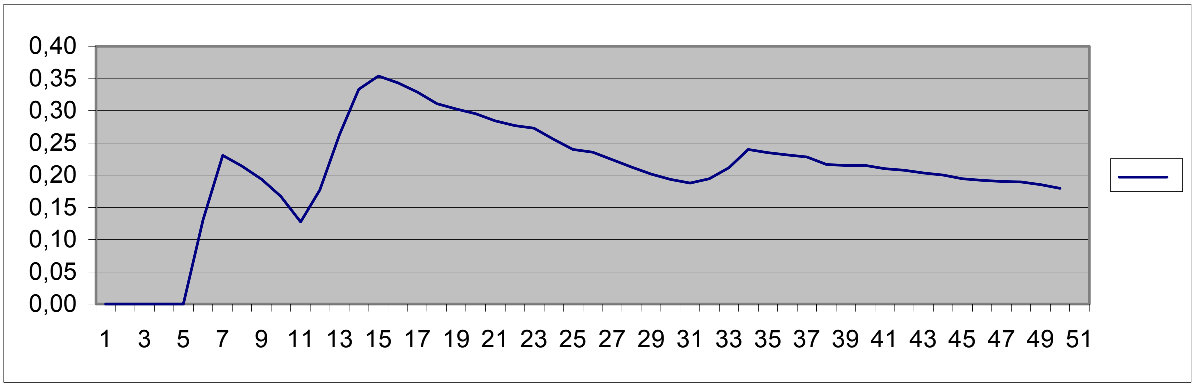
$$PI = \frac{DI}{DT} = \frac{34}{190} = 17,89\%$$

En el caso de que la dirección considere muy alto este porcentaje, se debería experimentar con un stock de reorden mayor a 10. Para ello se deberá fijar un nuevo valor y correr nuevamente el proceso. Por el contrario, si lo considera bajo, se deberá simular con un punto de pedido menor a 10. Normalmente se fija un rango aceptable de porcentaje de insatisfechos, de manera que se simula hasta encontrar un valor que esté dentro de esos límites.

Debe tenerse en cuenta que el tamaño de la simulación efectuada en este ejemplo es insuficiente como para obtener un resultado confiable desde el punto de vista estadístico.

En la siguiente tabla se ha representado el proceso de simulación y posteriormente se ha graficado la evolución del porcentaje de pedidos insatisfechos a través del tiempo. Como se puede observar, el valor de esta variable aún no ha alcanzado un valor estable, por lo que el sistema no ha encontrado el régimen permanente.

t	SI(t)	D(t)	SF(t)	¿Se pide?	j	TR(j)	TD(j)	DI(t)	DI	DT	PI
1	20	2	18	NO					0	2	0,00%
2	18	1	17	NO					0	3	0,00%
3	17	5	12	NO					0	8	0,00%
4	12	6	6	SI	1	2.798	8		0	14	0,00%
5	6	5	1	NO					0	19	0,00%
6	1	4	0	NO				3	3	23	13,04%
7	0	3	0	NO				3	6	26	23,08%
8	22	2	20	NO					6	28	21,43%
9	20	3	17	NO					6	31	19,35%
10	17	5	12	NO					6	36	16,67%
11	23	11	1	SI	2	3.42	16		6	47	12,77%
12	1	4	0	NO				3	9	51	17,65%
13	0	6	0	NO				6	15	57	26,32%
14	0	6	0	NO				6	21	63	33,33%
15	0	2	0	NO				2	23	65	35,38%
16	22	2	20	NO					23	67	34,33%
17	20	3	17	NO					23	70	32,86%
18	17	4	13	NO					23	74	31,08%
19	13	2	11	NO					23	76	30,26%
20	11	2	9	SI	3	2.647	24		23	78	29,49%
21	9	3	6	NO					23	81	28,40%
22	6	2	4	NO					23	83	27,71%
23	4	5	0	NO				1	24	88	27,27%
24	22	6	16	NO					24	94	25,53%
25	16	6	10	SI	4	0.445	27		24	100	24,00%
26	10	2	8	NO					24	102	23,53%
27	30	5	25	NO					24	107	22,43%
28	25	6	19	NO					24	113	21,24%
29	19	6	13	NO					24	119	20,17%
30	13	5	8	SI	5	3.666	35		24	124	19,35%
31	8	4	4	NO					24	128	18,75%
32	4	6	0	NO				2	26	134	19,40%
33	0	3	0	NO				3	29	137	21,17%
34	0	5	0	NO				5	34	142	23,94%
35	22	3	19	NO					34	145	23,45%
36	19	2	17	NO					34	147	23,13%
37	17	2	15	NO					34	149	22,82%
38	15	8	7	SI	6	3.0777	43		34	157	21,66%
39	7	1	6	NO					34	158	21,52%
40	6	0	6	NO					34	158	21,52%
41	6	4	2	NO					34	162	20,99%
42	2	2	0	NO				0	34	164	20,73%
43	22	3	19	NO					34	167	20,36%
44	19	3	16	NO					34	170	20,00%
45	16	5	11	NO					34	175	19,43%
46	11	2	9	SI	7	1.635	49		34	177	19,21%
47	9	2	7	NO					34	179	18,99%
48	7	1	6	NO					34	180	18,89%
49	28	4	24	NO					34	184	18,48%
50	24	6	18	NO					34	190	17,89%



2. COLAS

A un sistema de atención de un solo canal arriban clientes a una tasa de 3 por hora, según un proceso Poisson. La duración promedio del servicio es de 15 minutos (distribución exponencial). Sabiendo que cada servicio se cobra $15, se quiere determinar la longitud promedio de cola, el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema y el ingreso esperado.

Se resolverá el problema por simulación y luego se compararán los valores así obtenidos con la solución cuantitativa de este problema simple.

Para proceder a simular el proceso, se seleccionará en este caso el método de "evento a evento" y, además, se plantearán las siguientes hipótesis:

1) La disciplina de atención es del tipo FIFO (First In, First Out), es decir que el primer cliente que llega es el primero en ser atendido.

2) Interesa determinar los valores del sistema operando en régimen permanente.

3) La población de clientes es infinita.

4) No existen restricciones de formación de cola (cola infinita).

5) La población de usuarios no presenta el fenómeno de impaciencia.

6) En el estado inicial el sistema está vacío.

Para simular el proceso de arribos de clientes al sistema se deberá considerar la variable "intervalo de tiempo entre arribos de clientes", ya que se está utilizando el método de "evento a evento". Dado que se trata de un proceso Poisson, esta variable está exponencialmente distribuida. Se tomará la hora como unidad de tiempo.

Llamaremos:

IAC: Intervalo de tiempo entre arribos de clientes (en horas por cliente)
(variable aleatoria con distribución exponencial y media $\frac{1}{\lambda} = 0,333$)

DS: Duración del servicio (en horas por cliente)
(variable aleatoria con distribución exponencial y media $\mu = 0,25$)

Lc: Longitud promedio de la cola

W: Tiempo promedio de permanencia de un cliente en el sistema

IE: Ingreso esperado

Debe tenerse en cuenta que en un proceso de simulación real se van solicitando los valores de variables simuladas cada vez que se necesiten. Sin embargo, a fin de facilitar la comprensión del tema, se simularán previamente los valores de las variables, que utilizaremos luego en el proceso de simulación del caso.

La secuencia de números aleatorios que se tomarán para simular el IAC y los valores que se obtienen mediante la fórmula de transformación

$$IAC = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{r}$$

son los siguientes:

r	0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	0,76	0,52	0,01	0,35	0,86	0,34	0,67	0,35
IAC	0,77	0,80	0,10	0,46	0,37	0,09	0,22	1,53	0,35	0,05	0,36	0,13	0,35

r	0,48	0,76	0,11	0,95	0,90	0,91	0,17	0,39	0,29	0,27	0,49	0,45	0,27
IAC	0,24	0,09	0,74	0,02	0,04	0,03	0,59	0,31	0,41	0,44	0,24	0,27	0,33

Adicionalmente, la secuencia de números aleatorios para simular la DS y los valores que se obtienen mediante la fórmula de transformación

$$DS = \frac{1}{\mu} \cdot \ln \frac{1}{r}$$

son los siguientes:

r	0,66	0,31	0,85	0,63	0,73	0,08	0,11	0,83	0,88	0,85	0,01	0,8	0,05
DS	0,10	0,29	0,04	0,12	0,08	0,63	0,55	0,05	0,03	0,04	1,15	0,06	0,75

r	0,69	0,09	0,91	0,8	0,44	0,12	0,82	0,63	0,61	0,94	0,42	0,23	0,37
DS	0,09	0,60	0,02	0,06	0,21	0,53	0,05	0,12	0,12	0,02	0,22	0,37	0,25

En la siguiente tabla se procedió a simular el proceso. En la tabla se consignan las siguientes variables:

t: tiempo (en horas)
Δt: longitud del intervalo hasta el próximo evento.
Cl No: número de cliente
PA: próximo arribo.

L(n): cantidad de clientes en cola desde el instante t hasta el instante (t+Δt).

E: estado del canal. Se indica con una "O" la condición de ocupado del canal y con una "V" cuando está
vacío.

FIN: instante de finalización del servicio

W: permanencia en el sistema del cliente

La simulación se lleva entonces a cabo de la siguiente forma:

1) Se comienza en el instante t = 0. Como se ha supuesto que el sistema está vacío en el instante inicial, el próximo evento será un arribo. Se solicita un primer valor de la variable "intervalo entre arribos de clientes" (IAC), que resulta 0,77.

2) Se avanza el proceso hasta el próximo evento (t = 0,77). En este instante arriba el cliente No. 1 y, como el canal está desocupado, pasa a atenderse inmediatamente. El estado del canal será O (ocupado).

3) Se determina cuál es el próximo evento (un arribo o la finalización del servicio):

   PA = t + IAC = 0,77 + 0,8 = 1,57

   FIN = t + DS = 0,77 + 0,10 = 0,87

   En consecuencia el próximo evento se produce en el instante 0,87 (finalización del servicio)

	ARRIBOS			COLA	ATENCIÓN CANAL				SALIDA		
t	**Cl No.**	**IAC**	**PA**	**L(n)**	**E**	**Cl No.**	**DS**	**FIN**	**Cl No.**	**W**	**Δt**
0,00		0,77	0,77	0	V						0,77
0,77	1	0,80	1,57	0	O	1	0,10	0,87			0,10
0,87				0	V				1	0,10	0,70
1,57	2	0,10	1,67	0	O	2	0,29	1,86			0,10
1,67	3	0,46	2,13	1	O						0,19
1,86				0	O	3	0,04	1,90	2	0,29	0,04
1,90				0	V				3	0,23	0,23
2,13	4	0,37	2,50	0	O	4	0,12	2,25			0,12
2,25				0	V				4	0,12	0,25
2,50	5	0,09	2,59	0	O	5	0,08	2,58			0,08
2,58				0	V				5	0,08	0,01
2,59	6	0,22	2,81	0	O	6	0,63	3,22			0,22
2,81	7	1,53	4,34	1	O						0,41
3,22				0	O	7	0,55	3,77	6	0,41	0,55
3,77				0	V				7	0,96	0,57
4,34	8	0,35	4,69	0	O	8	0,05	4,39			0,05
4,39				0	V				8	0,05	0,3
4,69	9	0,05	4,74	0	O	9	0,03	4,72			0,03
4,72				0	V				9	0,03	0,02
4,74	10	0,36	5,10	0	O	10	0,04	4,78			0,04
4,78				0	V				10	0,04	0,32
5,10	11	0,13	5,23	0	O	11	1,15	6,25			0,13
5,23	12	0,35	5,58	1	O						0,35
5,58	13	0,24	5,82	2	O						0,24
5,82	14	0,09	5,91	3	O						0,09
5,91	15	0,74	6,65	4	O						0,34
6,25				3	O	12	0,06	6,31	11	1,15	0,06
6,31				2	O	13	0,75	7,06	12	1,08	0,34
6,65	16	0,02	6,67	3	O						0,02
6,67	17	0,04	6,71	4	O						0,04
6,71	18	0,03	6,74	5	O						0,03
6,74	19	0, 59	7,33	6	O						0,32
7,06				5	O	14	0,09	7,15	13	1,48	0,09
7,15				4	O	15	0,60	7,75	14	1,33	0,18
7,33	20	0,31	7,64	5	O						0,31
7,64	21	0,41	8,05	6	O						0,11
7,75				5	O	16	0,02	7,77	15	1,84	0,02
7,77				4	O	17	0,06	7,83	16	1,12	0,06
7,83				3	O	18	0,21	8,04	17	1,16	0,21
8,04				2	O	19	0,53	8,57	18	1,33	0,01
8,05	22	0,44	8,49	3	O						0,44
8,49	23	0,24	8,73	4	O						0,08
8,57				3	O	20	0,05	8,62	19	1,83	0,05
8,62				2	O	21	0,12	8,74	20	1,29	0,11
8,73	24	0,27	9,00	3	O						0,01
8,74				2	O	22	0,12	8,86	21	1,10	0,12
8,86				1	O	23	0,02	8,88	22	0,81	0,02
8,88				0	O	24	0,22	9,10	23	0,39	0,12
9,00	25	0,33	9,33	1	O						0,1
9,10				0	O	25	0,37	9,47		0,37	0,23
9,33	26	***	***	1	O						0,14
9,47				0		26	***	***	25	0,47	***

4) Se avanza el parámetro t hasta el instante 0,87, se desocupa el canal (V) y se calcula el tiempo de permanencia del primer cliente en el sistema.

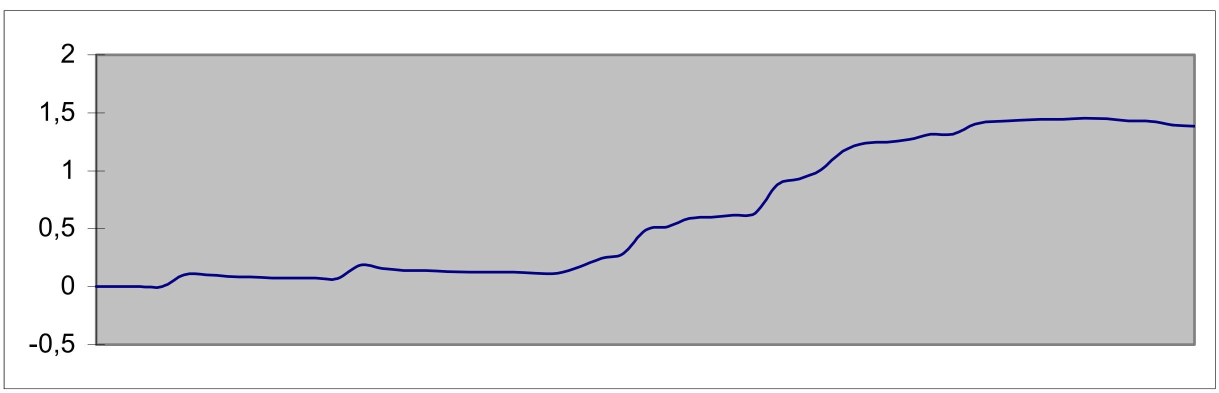
5) En el instante 1,57 se produce otro arribo (cliente No. 2), ocupándose nuevamente el canal. Se determina el próximo evento, que será otro arribo, en el instante 1,67.

6) Se avanza el reloj hasta el instante 1,67, que es cuando el cliente No. 3 arriba. Como el canal está ocupado, se pone en cola. Se determina el próximo evento que será la finalización del servicio del cliente No. 2.

Estos pasos se repiten hasta haber simulado los 25 clientes. Luego se procede a calcular los valores promedios de las variables solicitadas. Así, la longitud promedio de cola se calcula del siguiente modo:

$$L_c = \frac{\sum L(n)_i \cdot \Delta t_i}{t} = 1,385$$

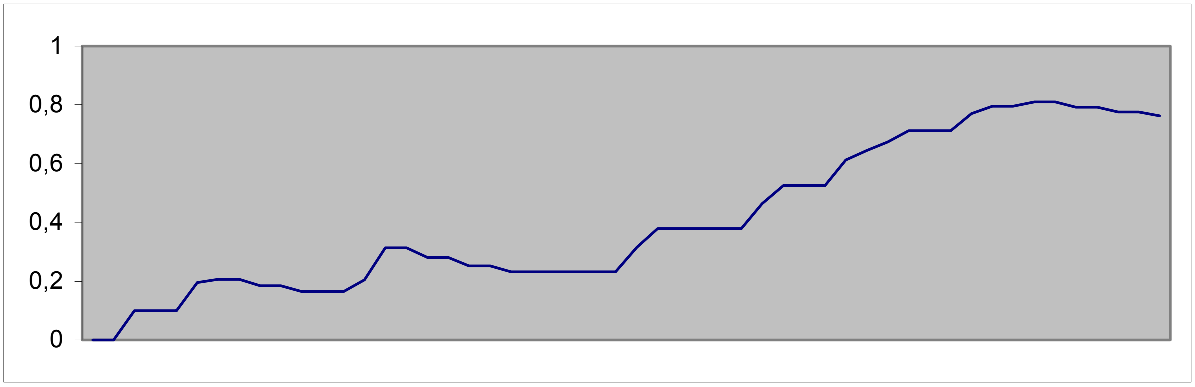
en donde "i" representa cada uno de los intervalos de avance, "Δt_i" la longitud del intervalo y "t" el tiempo total de simulación. En el siguiente gráfico se observa la evolución de esta variable.



El tiempo de permanencia promedio de un cliente en el sistema estará dado por

$$W = \frac{\sum w_j}{n} = \frac{19,06}{25} = 0,76\ hs$$

en donde "j" se refiere a cada uno de los clientes que ingresa al sistema y "n" a la cantidad total de clientes que se atendieron en el sistema en el período simulado. En el siguiente gráfico se puede ver cómo evolucionó la variable durante el proceso simulado.



Finalmente, se puede calcular el ingreso esperado, cuya expresión es:

$$IE = 15\frac{\$}{cl}\cdot\frac{25}{9,33}\frac{cl}{h} = 40,2\frac{\$}{h}$$

Resolviendo analíticamente este problema, tendremos:

$$\mathrm{L_c} = \frac{\lambda.}{\mu.-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4-3} - \frac{3}{4} = 2{,}25\ \mathrm{cl}$$

$$L_c = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,25}{3} - \frac{3}{4} = 2,25\,cl$$

$$W = \frac{L_c}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{2,25}{3} + \frac{1}{4} = 1\,h$$

$$IE = \bar{\lambda}\cdot 15 = 45\frac{\$}{h}$$

La diferencia entre los resultados numérico y cuantitativo se debe a que la corrida de simulación no ha sido lo suficientemente larga.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un sistema de atención al público, al que arriban en promedio 10 clientes por minuto, presenta las siguientes características:

a. En el sector de recepción (sector A) se realiza un primer servicio, común para todos los clientes, con un tiempo promedio de atención de 0,2 minutos por cliente, un solo canal, y con cola única sin restricciones de capacidad.

b. La población es impaciente. La probabilidad de ingreso es función de la cantidad de clientes que hay en el sector de recepción, de acuerdo con la siguiente ley:

n	0	1	2	3
P(ingreso/n)	1	0,5	0,2	0

c. Una vez realizado el trámite de recepción, el 40% de los clientes pasa a recibir el segundo servicio al sector B, sistema de un único canal que atiende a una velocidad promedio de 3 clientes por minuto, sin restricciones de capacidad en la cola.
El resto, recibe el segundo servicio en el sector C, en donde atiende un solo canal a un promedio de 2 clientes por minuto. En este sector pueden residir como máximo dos clientes (uno atendiéndose y otro esperando), de manera que si llega un cliente a este sector cuando hay dos personas en él, se retira.

d. En el sector B se cobra $50 a cada cliente, mientras que en el C, $60.

e. En todos los casos los procesos de arribo y atención son de tipo Poisson y la modalidad de atención en lo que se refiere a las prioridades es de tipo FIFO (el que primero llega primero se atiende).

Con el objeto de calcular la longitud promedio de cola de cada sector y la ganancia esperada del sistema, simular el proceso para 50 clientes.

2. Se desea planificar la compra inicial de un repuesto para un grupo de máquinas conjuntamente con la adquisición de éstas. Cuando se agote este stock, dicho componente se repondrá cuando ocurra su rotura, con pedidos unitarios que tienen una demora promedio de 0,7 mes/repuesto, según una distribución normal con desvío standard 0,1, lapso durante el cual la máquina correspondiente permanece parada.

Se tiene una rotura en promedio cada 1,5 meses, con una distribución estadística exponencial. Existe un costo de $50.000 por mes por cada máquina parada en espera de la provisión del repuesto y un costo de mantenimiento en stock de $240 por mes por cada repuesto.

Simular el proceso con el objeto de determinar el número óptimo de repuestos a comprar inicialmente, suponiendo un stock inicial de 3 repuestos.

3. Un vendedor de revistas compra semanalmente un semanario el día lunes a primera hora. El costo de cada ejemplar es de $15. La demanda de la revista hasta el día jueves incluido tiene la siguiente distribución de probabilidad:

Demanda	5	6	7	8	9	10	11
Probabilidad	0,05	0,05	0,1	0,15	0,25	0,25	0,15

La demanda para los siguientes días de la semana responde a una distribución Poisson con media 2. al finalizar la semana el vendedor regresa las revistas al proveedor quien se le paga $5 por ejemplar. Si el precio de venta al público es de $30, determinar la política óptima de compra por simulación.

4. En un aeropuerto de una sola pista se están estudiando diferentes problemas referidos al tráfico aéreo en el horario de 17 a 21 hs. En este lapso, un promedio de un avión cada 5 minutos solicita permiso para aterrizar, y uno cada 15 minutos para despegar, según distribuciones poissonianas.

Los tiempos que le toma al controlador de tráfico ayudar a que en un aeroplano aterrice o despegue tienen una distribución normal con medias 3 y 2 minutos y desvíos standard 0,4 y 0,2, respectivamente.

La torre de control otorga permiso para aterrizar de acuerdo al orden de llegada de los aeroplanos, y para despegar de acuerdo al orden de solicitud de permiso para posicionarse en la pista.

Una solicitud para aterrizar tiene prioridad sobre una de despegue.

Simular el proceso para determinar:

a) el número promedio de aeroplanos que habiendo pedido pista para aterrizar se encuentran aún sobrevolando el aeropuerto,

b) el número promedio de aviones que han solicitado pista para despegar y que aún se encuentran en espera, y

c) la pérdida estimada para las compañías aéreas si se sabe que un avión en espera para aterrizar implica un costo de U$S 200 por minuto, y para un avión con las turbinas encendidas esperando despegar un costo de U$S 60 por minuto.

5. Simular 50 veces el siguiente proyecto a fin de determinar la duración total y la secuencia de actividades críticas.

Actividad	Precede inmediatamente a	Duración (días)	
		Distribución	**Parámetros**
A	B, C	Exponencial	$1/\lambda = 15$
B	E	Uniforme	$b = 22,\ a = 18$
C	F	Exponencial	$1/\lambda = 5$
D	-	Normal	$\mu = 20,\ \sigma = 5$
E	-	Normal	$\mu = 15,\ \sigma = 3$

6. En una petroquímica se produce un compuesto a una tasa media de 10 m^3/día con un desvío standard de 1 m^3/día (distribución normal), que se almacena en un tanque. La demanda de este compuesto sigue también una distribución normal con media 8 m^3/día y desvío estándar de 2 m^3/día.

Cuando el nivel de stock supera los 35 m3, se detiene la producción de este compuesto, dedicándose la planta a la elaboración de otros productos hasta que se llegue al stock de reorden. Una vez alcanzado este nivel, se emite una orden de producción que tiene un costo de $600. El tiempo que transcurre desde que se emite la orden hasta que la planta comienza a producir el compuesto tiene una distribución uniforme discretizada con parámetros a = 1 día y b = 3 días.

El costo de almacenamiento del compuesto es de 1 $/$m^3$ por día y el costo de agotamiento (es decir aquel en el que se incurre por no disponer de este producto) es de 3.000 $/$m^3$ por día.

Se quiere determinar el stock de reorden óptimo. Simular el proceso durante 60 días, comenzando con un stock inicial de 28 m^3 y adoptando un stock de reorden de 15m^3.

7. Una empresa manufacturera fabrica dos piezas A y B, que dejan respectivamente una utilidad de $400 y $300 por unidad. El proceso de elaboración de ambos productos consiste en tres etapas: un tratamiento térmico realizado en un equipo que tiene una disponibilidad mensual normal de media 720 horas y desvío standard de 100 hs, un proceso de mecanizado llevado a cabo en un sector de máquinas que cuenta con una capacidad mensual normal de media 640 horas y desvío standard de 64, y una etapa de finalización manual efectuada en un departamento que tiene una disponibilidad de media 480 horas hombre por mes y desvío standard de 84. El tiempo en horas que requiere cada unidad de para ambas piezas en las diferentes etapas de elaboración se indica a continuación:

	A	**B**
TRATAMIENTO TERMICO	Distibución uniforme entre 8 y 10	Distribución uniforme entre 16 y 20
MAQUINA	Distribución triangular de parámetros 14, 16, 20	Distribución triangular de parámetros 6, 8, 9
MANO DE OBRA	Distribución exponencial de media 10	Distribución exponencial de media 10

Simular el proceso para determinar la cantidad de piezas A y B que deberán fabricarse mensualmente con el objeto de maximizar las utilidades.

TABLA 1. NÚMEROS ALEATORIOS (r)

84962	45570	85176	39358	07343	92087	30034	27738	16616	42612
02593	00247	81770	68437	00365	63412	34875	20100	92997	20484
91193	76416	53789	93936	41043	88193	26363	16088	80806	19525
24842	97969	21244	03194	02395	14018	60504	80022	80979	62495
95221	51754	95886	97076	86435	58557	81432	17754	06185	16015
42417	04982	63219	61733	80060	62095	01605	38091	68648	06878
25651	24334	76544	45203	98041	95707	47213	96102	66092	71403
34671	09704	55560	82988	53027	14395	45986	50115	74112	08263
31882	39577	54774	91300	46781	98411	47106	93608	43477	33675
10214	53449	53919	76771	02884	21065	86155	88807	98912	13153
54433	61382	84822	36906	83808	04979	37630	47548	97627	70897
65618	57371	36826	78751	56671	57121	09522	02375	16796	69402
95728	39501	83099	74041	90952	08516	72598	73901	09912	03532
96759	87193	97756	07164	31124	62436	36794	02602	61540	04087
33904	97889	22857	37978	55331	91746	25030	39739	12461	53863
23227	46683	57336	39305	93741	90395	42247	57990	86838	24658
73038	95685	85331	99951	93012	91902	29724	71056	09867	49994
74692	54768	19791	91231	74348	13183	82589	89080	96887	82708
49949	18861	73658	38852	31540	89776	64338	66395	17469	24926
34704	82140	36448	42065	44925	76140	39400	28179	59424	72176
35914	52139	49039	17434	22790	35949	84311	64108	93937	56468
77244	56586	69863	11913	00143	48927	65906	24157	09605	66021
44227	28819	28057	43650	19171	05379	50162	40740	07529	04611
68906	90195	84198	31425	34406	85387	19583	84067	99622	89378
88906	41296	41061	32981	06610	58605	77894	16278	70570	05789
07318	82387	48582	31495	43304	13709	97521	06526	22012	57408
76722	67209	43440	22962	66492	43824	65123	93370	00452	19527
67575	61200	50903	59892	82878	14532	78612	43516	84655	53270
39145	39420	62705	37169	32987	36421	02949	88201	12660	82628
29948	22454	15135	16721	36759	64547	53995	84214	52547	53776
68192	01120	54994	68730	51839	44348	34552	21084	94128	19659
47294	25057	83630	77451	72480	27800	92436	34345	25730	99359
91068	24417	32803	57250	48340	78343	43720	63203	31400	00958
95179	97557	91397	54896	29012	35348	73366	47769	62486	20491
69886	52996	24078	55751	14001	83669	57016	03729	99328	43099
14899	09055	26892	63072	55625	60194	47993	73952	80188	25227
78240	08939	54476	55447	82531	66260	55119	20421	35537	88088
18650	73454	18596	58460	35960	00911	08404	31850	13845	57600
07453	17112	92404	23504	62958	49311	24100	34183	39002	26863
67130	32023	58240	40403	05411	81156	34264	09644	21730	90805

TABLA 2. NÚMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCIÓN NORMAL (r_u)

-0,424	-0,741	0,304	-1,648	0,768	0,579	0,890	-0,988	-0,890	-1,949
-1,661	-0,645	0,359	1,862	0,951	-0,644	0,489	-0,171	-0,931	-1,565
0,974	0,886	1,123	-1,342	-0,063	-0,074	1,857	-0,269	0,048	2,061
1,403	1,708	0,865	-0,188	0,199	1,083	-0,529	0,610	-0,606	-1,469
1,365	0,036	0,083	0,720	-1,214	0,536	0,765	-0,570	1,871	1,080
-1,740	-0,403	0,557	1,295	0,482	0,602	1,061	1,552	1,616	0,176
0,006	-1,046	-0,606	-1,580	2,018	0,461	1,211	0,875	-0,312	1,055
-0,271	0,909	-1,904	-1,760	0,646	-0,408	0,979	0,189	0,509	0,665
0,128	1,024	-1,788	0,028	1,100	-0,347	0,644	0,382	0,396	0,775
-0,468	-1,733	0,097	1,979	0,678	-0,960	0,685	1,475	-0,283	0,128
-0,523	-0,004	-0,588	0,257	0,441	-0,577	0,934	0,343	-0,596	-0,462
-0,487	0,248	-0,003	0,291	-0,644	0,024	-0,076	1,459	-0,309	0,404
-0,574	-2,179	-1,102	2,065	0,037	-0,545	-0,604	-0,146	1,331	1,040
1,762	-0,311	-0,595	1,349	-0,550	-1,340	1,010	-1,142	1,058	0,885
-0,557	1,494	-2,071	-1,963	-0,790	1,122	1,174	-0,130	-0,082	2,189
0,483	-0,324	0,721	0,280	-2,310	0,331	0,047	-2,372	-0,297	-0,695
-0,090	0,915	-0,293	0,253	1,803	1,354	-1,192	-0,413	-0,500	2,717
0,325	2,253	0,324	0,251	1,476	0,578	0,749	-0,976	0,059	-1,615
0,125	0,140	-0,380	0,416	0,726	1,274	-0,501	-0,797	-0,521	0,550
-0,055	0,870	0,215	0,815	0,156	0,221	0,896	-0,983	-0,169	1,299
-0,417	-0,324	-1,371	1,177	1,740	0,033	1,328	2,493	0,665	0,800
-1,418	0,072	1,516	-0,191	-0,568	-0,928	-0,437	0,811	0,080	-0,340
-0,408	-0,487	2,086	1,098	-0,065	0,028	-0,718	-0,581	1,734	-0,328
0,300	0,979	-0,196	-1,290	0,303	-0,285	-1,133	1,424	-0,303	-1,674
-0,490	-0,324	-0,501	-1,795	0,667	-1,459	-0,748	-0,214	0,033	-0,140
1,565	0,734	-0,577	0,564	0,247	1,310	0,379	0,155	1,647	-0,858
1,147	-0,044	-0,667	-0,281	1,803	0,985	2,556	1,206	0,060	-1,159
1,073	0,094	0,158	0,037	-0,451	0,437	-1,131	-0,751	0,321	0,033
-0,501	1,733	-0,945	-0,345	-1,292	-1,263	-0,337	-0,572	0,470	0,974
0,616	-0,354	0,066	-0,272	0,838	0,319	-0,486	-0,350	-0,617	-0,602
0,707	-1,230	0,056	0,293	-0,258	0,519	1,668	-1,230	-0,127	0,673
-0,110	-1,437	1,115	-0,384	0,151	-0,147	1,416	1,264	-0,040	-0,379
-0,006	-0,834	-0,095	-0,688	0,460	0,506	0,042	-0,570	-1,253	-0,192
-0,976	-0,474	0,425	0,140	0,083	-2,139	0,593	0,015	-0,894	0,920
-1,151	0,157	0,377	0,837	0,829	1,411	-0,476	0,692	-0,249	-0,916
-1,290	-0,087	0,424	-0,373	0,287	0,588	0,831	0,639	0,044	0,694
-0,252	0,562	-1,032	-0,481	-1,299	-1,073	-1,301	0,204	1,159	0,159
-0,986	-1,225	-1,402	0,245	0,956	-2,105	0,340	0,925	0,478	-0,359
-0,868	0,383	-0,613	-0,450	-1,477	-0,728	-2,003	-1,268	-0,069	0,909
0,192	0,512	0,621	-0,115	-1,436	0,030	-0,692	-0,964	-0,583	-0,148

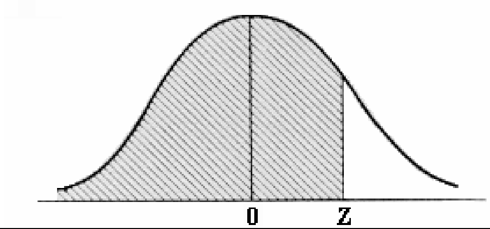
TABLA 3. DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE POISSON $F_{PO}(n, \lambda t)$

	n																
λt	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
0,02	0,980	1,000															
0,04	0,961	0,999	1,000														
0,06	0,942	0,998	1,000														
0,08	0,923	0,997	1,000														
0,10	0,905	0,995	1,000														
0,15	0,861	0,990	0,999	1,000													
0,20	0,819	0,982	0,999	1,000													
0,25	0,779	0,974	0,998	1,000													
0,30	0,741	0,963	0,996	1,000													
0,35	0,705	0,951	0,994	1,000													
0,40	0,670	0,938	0,992	0,999	1,000												
0,45	0,638	0,925	0,989	0,999	1,000												
0,50	0,607	0,910	0,986	0,998	1,000												
0,55	0,577	0,894	0,982	0,998	1,000												
0,60	0,549	0,878	0,977	0,997	1,000												
0,65	0,522	0,861	0,972	0,996	0,999	1,000											
0,70	0,497	0,844	0,966	0,994	0,999	1,000											
0,75	0,472	0,827	0,959	0,993	0,999	1,000											
0,80	0,449	0,809	0,953	0,991	0,999	1,000											
0,85	0,427	0,791	0,945	0,989	0,998	1,000											
0,90	0,407	0,772	0,937	0,987	0,998	1,000											
0,95	0,387	0,754	0,929	0,984	0,997	1,000											
1,00	0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999	1,000										
1,10	0,333	0,699	0,900	0,974	0,995	0,999	1,000										
1,20	0,301	0,663	0,879	0,966	0,992	0,998	1,000										
1,30	0,273	0,627	0,857	0,957	0,989	0,998	1,000										
1,40	0,247	0,592	0,833	0,946	0,986	0,997	0,999	1,000									
1,50	0,223	0,558	0,809	0,934	0,981	0,996	0,999	1,000									
1,60	0,202	0,525	0,783	0,921	0,976	0,994	0,999	1,000									
1,70	0,183	0,493	0,757	0,907	0,970	0,992	0,998	1,000									
1,80	0,165	0,463	0,731	0,891	0,964	0,990	0,997	0,999	1,000								
1,90	0,150	0,434	0,704	0,875	0,956	0,987	0,997	0,999	1,000								
2,00	0,135	0,406	0,677	0,857	0,947	0,983	0,995	0,999	1,000								
2,20	0,111	0,355	0,623	0,819	0,928	0,975	0,993	0,998	1,000								
2,40	0,091	0,308	0,570	0,779	0,904	0,964	0,988	0,997	0,999	1,000							
2,60	0,074	0,267	0,518	0,736	0,877	0,951	0,983	0,995	0,999	1,000							
2,80	0,061	0,231	0,469	0,692	0,848	0,935	0,976	0,992	0,998	0,999	1,000						
3,00	0,050	0,199	0,423	0,647	0,815	0,916	0,966	0,988	0,996	0,999	1,000						
3,20	0,041	0,171	0,380	0,603	0,781	0,895	0,955	0,983	0,994	0,998	1,000						
3,40	0,033	0,147	0,340	0,558	0,744	0,871	0,942	0,977	0,992	0,997	0,999	1,000					
3,60	0,027	0,126	0,303	0,515	0,706	0,844	0,927	0,969	0,988	0,996	0,999	1,000					
3,80	0,022	0,107	0,269	0,473	0,668	0,816	0,909	0,960	0,984	0,994	0,998	0,999	1,000				
4,00	0,018	0,092	0,238	0,433	0,629	0,785	0,889	0,949	0,979	0,992	0,997	0,999	1,000				
4,20	0,015	0,078	0,210	0,395	0,590	0,753	0,867	0,936	0,972	0,989	0,996	0,999	1,000				
4,40	0,012	0,066	0,185	0,359	0,551	0,720	0,844	0,921	0,964	0,985	0,994	0,998	0,999	1,000			
4,60	0,010	0,056	0,163	0,326	0,513	0,686	0,818	0,905	0,955	0,980	0,992	0,997	0,999	1,000			
4,80	0,008	0,048	0,143	0,294	0,476	0,651	0,791	0,887	0,944	0,975	0,990	0,996	0,999	1,000			
5,00	0,007	0,040	0,125	0,265	0,440	0,616	0,762	0,867	0,932	0,968	0,986	0,995	0,998	0,999	1,000		
5,20	0,006	0,034	0,109	0,238	0,406	0,581	0,732	0,845	0,918	0,960	0,982	0,993	0,997	0,999	1,000		
5,40	0,005	0,029	0,095	0,213	0,373	0,546	0,702	0,822	0,903	0,951	0,977	0,990	0,996	0,999	1,000		
5,60	0,004	0,024	0,082	0,191	0,342	0,512	0,670	0,797	0,886	0,941	0,972	0,988	0,995	0,998	0,999	1,000	
5,80	0,003	0,021	0,072	0,170	0,313	0,478	0,638	0,771	0,867	0,929	0,965	0,984	0,993	0,997	0,999	1,000	
6,00	0,002	0,017	0,062	0,151	0,285	0,446	0,606	0,744	0,847	0,916	0,957	0,980	0,991	0,996	0,999	0,999	1,000

	n																
λt	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
6,20	0,002	0,015	0,054	0,134	0,259	0,414	0,574	0,716	0,826	0,902	0,949	0,975	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000
6,40	0,002	0,012	0,046	0,119	0,235	0,384	0,542	0,687	0,803	0,886	0,939	0,969	0,986	0,994	0,997	0,999	1,000
6,80	0,001	0,009	0,034	0,093	0,192	0,327	0,480	0,628	0,755	0,850	0,915	0,955	0,978	0,990	0,996	0,998	0,999
7,00	0,001	0,007	0,030	0,082	0,173	0,301	0,450	0,599	0,729	0,830	0,901	0,947	0,973	0,987	0,994	0,998	0,999
7,20	0,001	0,006	0,025	0,072	0,156	0,276	0,420	0,569	0,703	0,810	0,887	0,937	0,967	0,984	0,993	0,997	0,999
7,40	0,001	0,005	0,022	0,063	0,140	0,253	0,392	0,539	0,676	0,788	0,871	0,926	0,961	0,980	0,991	0,996	0,998
7,80	0,000	0,004	0,016	0,048	0,112	0,210	0,338	0,481	0,620	0,741	0,835	0,902	0,945	0,971	0,986	0,993	0,997
8,00	0,000	0,003	0,014	0,042	0,100	0,191	0,313	0,453	0,593	0,717	0,816	0,888	0,936	0,966	0,983	0,992	0,996
8,00	0,000	0,003	0,014	0,042	0,100	0,191	0,313	0,453	0,593	0,717	0,816	0,888	0,936	0,966	0,983	0,992	0,996
8,50	0,000	0,002	0,009	0,030	0,074	0,150	0,256	0,386	0,523	0,653	0,763	0,849	0,909	0,949	0,973	0,986	0,993
9,00	0,000	0,001	0,006	0,021	0,055	0,116	0,207	0,324	0,456	0,587	0,706	0,803	0,876	0,926	0,959	0,978	0,989
9,50	0,000	0,001	0,004	0,015	0,040	0,089	0,165	0,269	0,392	0,522	0,645	0,752	0,836	0,898	0,940	0,967	0,982
10,00	0,000	0,000	0,003	0,010	0,029	0,067	0,130	0,220	0,333	0,458	0,583	0,697	0,792	0,864	0,917	0,951	0,973
10,50	0,000	0,000	0,002	0,007	0,021	0,050	0,102	0,179	0,279	0,397	0,521	0,639	0,742	0,825	0,888	0,932	0,960
11,00	0,000	0,000	0,001	0,005	0,015	0,038	0,079	0,143	0,232	0,341	0,460	0,579	0,689	0,781	0,854	0,907	0,944
11,50	0,000	0,000	0,001	0,003	0,011	0,028	0,060	0,114	0,191	0,289	0,402	0,520	0,633	0,733	0,815	0,878	0,924
12,00	0,000	0,000	0,001	0,002	0,008	0,020	0,046	0,090	0,155	0,242	0,347	0,462	0,576	0,682	0,772	0,844	0,899
12,50	0,000	0,000	0,000	0,002	0,005	0,015	0,035	0,070	0,125	0,201	0,297	0,406	0,519	0,628	0,725	0,806	0,869
13,00	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,011	0,026	0,054	0,100	0,166	0,252	0,353	0,463	0,573	0,675	0,764	0,835
13,50	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,019	0,041	0,079	0,135	0,211	0,304	0,409	0,518	0,623	0,718	0,798
14,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,006	0,014	0,032	0,062	0,109	0,176	0,260	0,358	0,464	0,570	0,669	0,756
14,50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,010	0,024	0,048	0,088	0,145	0,220	0,311	0,413	0,518	0,619	0,711
15,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,018	0,037	0,070	0,118	0,185	0,268	0,363	0,466	0,568	0,664

	n																
λt	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
7,00	0,999	1,000															
7,20	0,999	1,000															
7,40	0,998	0,999	1,000														
7,80	0,997	0,999	1,000														
8,00	0,996	0,998	0,999	1,000													
8,00	0,996	0,998	0,999	1,000													
8,50	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000												
9,00	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000												
9,50	0,982	0,991	0,996	0,998	0,999	1,000											
10,00	0,973	0,986	0,993	0,997	0,998	0,999	1,000										
10,50	0,960	0,978	0,988	0,994	0,997	0,999	0,999	1,000									
11,00	0,944	0,968	0,982	0,991	0,995	0,998	0,999	1,000									
11,50	0,924	0,954	0,974	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000								
12,00	0,899	0,937	0,963	0,979	0,988	0,994	0,997	0,999	0,999	1,000							
12,50	0,869	0,916	0,948	0,969	0,983	0,991	0,995	0,998	0,999	0,999	1,000						
13,00	0,835	0,890	0,930	0,957	0,975	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000						
13,50	0,798	0,861	0,908	0,942	0,965	0,980	0,989	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000					
14,00	0,756	0,827	0,883	0,923	0,952	0,971	0,983	0,991	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000				
14,50	0,711	0,790	0,853	0,901	0,936	0,960	0,976	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000			
15,00	0,664	0,749	0,819	0,875	0,917	0,947	0,967	0,981	0,989	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000			
16,00	0,566	0,659	0,742	0,812	0,868	0,911	0,942	0,963	0,978	0,987	0,993	0,996	0,998	0,999	0,999	1	
17,00	0,468	0,564	0,655	0,736	0,805	0,861	0,905	0,937	0,959	0,975	0,985	0,991	0,995	0,997	0,999	0,999	1
18,00	0,375	0,469	0,562	0,651	0,731	0,799	0,855	0,899	0,932	0,955	0,972	0,983	0,99	0,994	0,997	0,998	0,999
19,00	0,292	0,378	0,469	0,561	0,647	0,725	0,793	0,849	0,893	0,927	0,951	0,969	0,98	0,988	0,993	0,996	0,998
20,00	0,221	0,297	0,381	0,47	0,559	0,644	0,721	0,787	0,843	0,888	0,922	0,948	0,966	0,978	0,987	0,992	0,995

DISTRIBUCIÓN NORMAL ACUMULADA ESTANDARIZADA $F_{N*}(Z)$



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997